doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2016.06.007

基于时滞分割方法的 VTOL 直升机鲁棒非脆弱 H_∞ 控制

惠俊军[1],张合新[2],陈　伊[1],李　明[1]

(1. 陕西省宝鸡市150信箱11分箱,陕西 宝鸡 721013;2. 火箭军工程大学,西安 710025)

摘　要:针对含有飞行时滞的垂直起降(VTOL)直升机系统设计了时滞相关鲁棒非脆弱 H_∞ 控制器。基于时滞中点值把时滞区间均分为两部分,针对每一分割区间构造新的 Lyapunov-Krasovskii(L-K)泛函,并结合 L-K 稳定性定理、积分不等式方法和自由权矩阵技术,建立了新的基于线性矩阵不等式(LMI)形式的时滞相关有界实(BRL)条件。在此基础上设计了该系统的非脆弱 H_∞ 控制器,通过求解线性矩阵不等式的可行解得到控制器的参数化表达式。最后应用于 VTOL 直升机的飞行控制仿真表明,所设计的控制器具有更好的鲁棒性和非脆弱性。

关键词:非脆弱;H_∞ 控制;Lyapunov-Krasovskii 泛函;时滞分解;线性矩阵不等式

中图分类号:TP13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2095-8110(2016)06-0033-07

A Delay Decomposition Approach to Robust Non-fragile H_∞ Control for VTOL Helicopter

HUI Jun-jun[1], ZHANG He-xin[2], CHEN Yi[1], LI Ming[1]

(1. MailBox 150 Extension 11, Baoji Shanxi 721013, China;
2. The Rocket Force Engineering university, Xi'an 710025, China)

Abstract: The delay-dependent robust non-fragile H_∞ controller for a vertical taking-off and landing (VTOL) helicopter system with flight time-delays is investigated. Based on the delay decomposition method, the whole delay interval is divided into two equidistant subintervals at its central point and new Lyapunov-Krasovskii (L-K) functionals are introduced on these intervals. Then, by using L-K stability theorem, integral inequality method together with free weighting matrix approach, a new delay-dependent BRL is formulated in terms of linear matrix inequality. Based on this, non-fragile H_∞ controller is designed for this system. At last, simulation results show that the designed controller has good robust and non-fragile performance.

Key words: Non-fragile; H_∞ control; Lyapunov-Krasovskii (L-K) functional; Delay decomposition approach; Linear matrix inequality

0　引言

时滞现象常存在于导弹的制导、飞行器的控制与航空航天系统当中,它的存在一方面使得系统的分析与控制器的设计变得复杂,另一方面可以导致系统性能恶化甚至不稳定。近年来,时滞系统的稳定性分析与控制问题成为控制理论研究的热点问题[1-2]。

VTOL 直升机的垂直起降控制是一种典型的含有时滞的动态控制系统。在实际的飞行控制当中,常规的鲁棒控制器设计方法(如 H_∞、H_2 和 μ 综合),仅考虑系统参数的不确定性,而没有考虑控制器本身参数的不确定性。然而,在实际控制器的实现中,由于硬件(如 A/D、D/A 转换)、软件(如计算截断误差)等原因,使得控制器存在一定的不确定性[3]。Keel 等[4]指出,当控制器参数存在摄动时,常规的鲁棒控制器表现出高度的脆弱性,从而造成闭环系统的性能下降甚至控制器失效。所以对非脆弱控制器的研究引起人们的关注[5-12]。文献[5-8]和文献[9-12]分别针对时滞系统的非脆弱 H_∞ 控制问题和非脆弱保性能控制问题进行了深入研究。在这些研究中,主要围绕如何降低所得结论的保守

收稿日期:2016-02-14;**修订日期**:2016-03-07。
作者简介:惠俊军(1977-),男,博士,工程师,主要从事飞行器控制方面的研究。
E-mail: ep22stone@163.com

性和满足一定的性能指标而展开。就研究方法而言,主要有自由权矩阵方法、积分不等式方法和时滞分割方法等。在上述方法中,自由权矩阵方法和时滞分割方法有利于降低结论的保守性;然而,这两种方法都会随着引入过多矩阵变量和分割数的增大而增加计算负担,且不利于控制器的设计。积分不等式方法形式简单,含矩阵变量较少,利于理论分析和计算;然而如何构造缩放程度较小的不等式是一个难题。在兼顾结论的保守性、计算的复杂性和控制器的实现上,Lyapunov-Krasovskii (L-K)泛函和界定条件的合理选取成为目前研究的一个重点问题。

本文主要采用时滞分割和积分不等式相结合的处理方法,研究了 VTOL 直升机的非脆弱 H_∞ 控制问题。首先通过时滞分割构造适当的 L-K 泛函并结合积分不等式方法,建立时滞相关有界实(BRL)条件,在此基础上设计了非脆弱控制器。最后把该控制器应用于 VTOL 的飞行控制当中,仿真结论表明了设计方法的有效性,相比一般鲁棒控制器具有更好的镇定效果和明显的非脆弱性。

1 问题描述

某型 VTOL 直升机动态运动的线性化数学模型可描述如下[13]:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-h(t))+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{\omega}(t)\\ z(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_u\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{D}_\omega\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\ \forall t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t)=[v_{\mathrm{h}},v_{\mathrm{v}},q,\theta]^{\mathrm{T}}$ 为系统状态向量,v_{h}、v_{v}、q、θ 分别是 VTOL 直升机的水平速度、垂直速度、俯仰角速率和俯仰角。$\boldsymbol{u}(t)$ 为控制向量,$\boldsymbol{z}(t)$ 为被调输出,$\boldsymbol{\omega}(t)$ 为扰动输入向量。$h(t)$ 为时变连续的函数且满足

$$0\leqslant h_m\leqslant h(t)\leqslant h_M,\dot{h}(t)\leqslant\mu \tag{2}$$

针对系统(1)定义如下性能指标

$$\boldsymbol{J}(\omega)=\int_0^\infty[z(t)^{\mathrm{T}}z(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\mathrm{d}t \tag{3}$$

其中,$\gamma>0$ 为给定标量。本文主要目标是针对外部干扰作用下的系统(1),设计一个状态反馈非脆弱 H_∞ 控制器

$$\boldsymbol{u}(t)=(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t) \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{K}$ 为控制器增益; $\Delta\boldsymbol{K}$ 为增益摄动,并满足

$$\Delta\boldsymbol{K}=\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{F}_a(t)\boldsymbol{E}_a,\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_a(t)\leqslant I \tag{5}$$

使得满足以下两个条件:

1) $\boldsymbol{\omega}(t)=0$ 时,由(4)构成的闭环系统(1)渐近稳定;

2) 对于给定的 $\gamma>0$,在零初始条件下对于 $\|z(t)\|_2<\gamma^2\|\boldsymbol{\omega}(t)\|$,$\boldsymbol{\omega}(t)\in L_2[0,\infty]$。

把非脆弱控制器(4)代入系统(1),则闭环系统为:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-h(t))+\boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{\omega}(t)\\ z(t)=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_\omega\boldsymbol{\omega}(t)\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\ \forall t\in[-h_M,0]\end{cases} \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{K}+\boldsymbol{B}_u\Delta\boldsymbol{K}$,$\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_u\boldsymbol{K}+\boldsymbol{D}_u\Delta\boldsymbol{K}$。

为了证明方便,首先给出如下引理。

引理 1[14]. 对于任意定常矩阵 $\boldsymbol{W}\in\mathbb{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}>0$,标量 $h:=h(t)>0$ 和向量函数 $\dot{\boldsymbol{x}}:[-h,0]\to\mathbb{R}^n$,以下相关积分项有定义,则有:

$$-h\int_{t-h}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{W}&\boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{W}&-\boldsymbol{W}\end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}_1(t)$$

$$-\frac{h^2}{2}\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{W}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}-\boldsymbol{W}&\boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{W}&-\boldsymbol{W}\end{bmatrix}\boldsymbol{\zeta}_2(t)$$

其中,

$$\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h)],$$

$$\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)=\left[h\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \int_{t-h}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right]。$$

引理 2[15]. 设 $h_1\leqslant h(t)\leqslant h_2$,其中 $h(t):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,那么,对于任意的 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$,下面的不等式成立

$$-\int_{t-h_2}^{t-h_1}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant\delta^{\mathrm{T}}(t)\{(h_2-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}+(h(t)-h_1)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}+[\boldsymbol{N}\ \ -\boldsymbol{N}+\boldsymbol{M}\ \ -\boldsymbol{M}]+[\boldsymbol{N}\ \ -\boldsymbol{N}+\boldsymbol{M}\ \ -\boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}}\}\delta(t)$$

其中,

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_1)\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t))\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_2)];$$

$\boldsymbol{M}=[\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为适当维数的自由矩阵。

引理 3[16]. 假设 $\gamma_1\leqslant\gamma(t)\leqslant\gamma_2$,其中 $\gamma(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,那么,对于任意适当维数的常数矩阵 $\boldsymbol{\Xi}_1$、$\boldsymbol{\Xi}_2$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$,下面的矩阵不等式成立

$$\boldsymbol{\Omega}+(\gamma(t)-\gamma_1)\boldsymbol{\Xi}_1+(\gamma_2-\gamma(t))\boldsymbol{\Xi}_2<0$$

当且仅当

$$\boldsymbol{\Omega}+(\gamma_2-\gamma_1)\boldsymbol{\Xi}_1<0,\boldsymbol{\Omega}+(\gamma_2-\gamma_1)\boldsymbol{\Xi}_2<0$$

引理 4[17]. 给定具有适当维数的矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{H}$,$\boldsymbol{E}$,则有 $\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$,对任意满足 $\boldsymbol{F}(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I}$ 的 $\boldsymbol{F}(t)$ 成立的充要条件是存在 $\varepsilon>0$,使得

$$\boldsymbol{Q}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\varepsilon\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}<0$$

2 时滞相关有界实引理(BRL)

定理 1. 对于给定常数 h_m、h_M、μ 和 γ，如果存正定对称矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ * & P_{22} & P_{23} \\ * & * & P_{33}\end{bmatrix}$、$\boldsymbol{Q}_i(i=1,2,3)$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{R}_j(j=1,\cdots,4)$；适当维数的自由矩阵 $\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$、$\boldsymbol{M}_a$、$\boldsymbol{N}_a$ $(a=1,2,3)$，使得如下 LMIs 成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \sqrt{\delta}\boldsymbol{N} \\ * & -\boldsymbol{R}_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi} & \sqrt{\delta}\boldsymbol{M} \\ * & -\boldsymbol{R}_4 \end{bmatrix} < 0 \tag{8}$$

则系统(6)在非脆弱控制器(4)的作用下不仅渐近稳定，而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ。其中

$$\boldsymbol{\Xi}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{11} & \boldsymbol{\Xi}_{12} & \boldsymbol{T}_1A_1-\boldsymbol{P}_{13} & \boldsymbol{\Xi}_{15} & \boldsymbol{\Xi}_{16} & \boldsymbol{P}_{23} & \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{B}_\omega & \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \\ * & \boldsymbol{\Xi}_{22} & \boldsymbol{\Xi}_{23} & \boldsymbol{\Xi}_{24} & 0 & \boldsymbol{\Xi}_{26} & \boldsymbol{\Xi}_{27} & 0 & 0 \\ * & * & \boldsymbol{\Xi}_{33} & \boldsymbol{\Xi}_{34} & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \boldsymbol{\Xi}_{44} & 0 & -\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \boldsymbol{\Xi}_{55} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13} & \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{B}_\omega & 0 \\ * & * & * & * & * & \boldsymbol{\Xi}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{R}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_\omega^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\Xi}_{11}=\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{12}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{W}-\boldsymbol{R}_3-h_\delta^2\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{T}_1A_k+\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{12}=\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{P}_{12}+\boldsymbol{P}_{13}$, $\boldsymbol{\Xi}_{15}=\boldsymbol{P}_{11}-\boldsymbol{T}_1+\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{16}=\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}+h_\delta\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{\Xi}_{22}=-\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{23}=-\boldsymbol{N}_1+\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{24}=-\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{26}=-\boldsymbol{P}_{22}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{27}=-\boldsymbol{P}_{32}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{33}=-(1-\mu)\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{N}_2-\boldsymbol{N}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_2+\boldsymbol{M}_2^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{34}=-\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{N}_3^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{44}=-\boldsymbol{Q}_3-\boldsymbol{M}_3-\boldsymbol{M}_3^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{\Xi}_{55}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{T}_2-\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\Xi}_{66}=-\boldsymbol{R}_1-\boldsymbol{Z}$, $\delta=(h_M-h_m)/2$,

$h_\delta=(h_M+h_m)/2$, $\boldsymbol{H}=h_\delta^2\boldsymbol{R}_3+(h_M-h_\delta)\boldsymbol{R}_4+\dfrac{1}{4}h_\delta^4\boldsymbol{Z}$,

$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2+\boldsymbol{Q}_3+h_\delta^2\boldsymbol{R}_1+(h_M-h_\delta)^2\boldsymbol{R}_2$,

$\boldsymbol{N}=[0\quad N_1^{\mathrm{T}}\quad N_2^{\mathrm{T}}\quad N_3^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{M}=[0\quad M_1^{\mathrm{T}}\quad M_2^{\mathrm{T}}\quad M_3^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$,

$\boldsymbol{T}=[T_1^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad T_2^{\mathrm{T}}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$

证明：首先基于时滞中点值 h_δ，把时滞区间 $[h_m,h_M]$ 均分成两部分，即 $[h_m,h_\delta]$ 和 $[h_\delta,h_M]$。

1）当 $h(t)\in[h_\delta,h_M]$ 时，构造如下 L-K 泛函

$$\boldsymbol{V}_1(t)=\boldsymbol{V}_{11}(t)+\boldsymbol{V}_{12}(t)+\boldsymbol{V}_{13}(t) \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{V}_{11}(t)=\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_1(t),$$

$$\boldsymbol{V}_{12}(t)=\int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\int_{t-h_M}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{13}(t)={}&h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&(h_M-h_\delta)\int_{-h_M}^{-h_\delta}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\int_{-h_M}^{-h_\delta}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta+\\&\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)=\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\quad \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\quad \int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right],$$

取泛函沿系统(6)的导数有

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)\leqslant{}&2\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{\xi}}_1(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}(t)-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_\delta)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(t-h_\delta)-\\&(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(x-h(t))\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(t-h(t))-\\&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_M)\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}(t-h_M)-\\&h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\\&(h_M-h_\delta)\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s-\\&h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)Z\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{W}$、$\boldsymbol{H}$ 为定理 1 所定义。由积分不等式可得：

$$-h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant -\left(\int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_1\left(\int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right) \tag{11}$$

$$-(h_M-h_\delta)\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant -\left(\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{T}\boldsymbol{R}_2\left(\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right) \tag{12}$$

由引理 1 和引理 2 分别有

$$-h_\delta\int_{t-h_\delta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\leqslant \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-h_\delta)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_3 & \boldsymbol{R}_3\\ * & -\boldsymbol{R}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{x}(t-h_\delta)\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$-\frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Z}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta \leqslant$$

$$\begin{bmatrix} h_\delta\boldsymbol{x}(t) \\ \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{Z} & -\boldsymbol{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_\delta\boldsymbol{x}(t) \\ \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$-\int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \delta^{\mathrm{T}}(t)[(h_M-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_\delta)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} + [\boldsymbol{N} \quad -\boldsymbol{N}+\boldsymbol{M} \quad -\boldsymbol{M}] + [\boldsymbol{N} \quad -\boldsymbol{N}+\boldsymbol{M} \quad -\boldsymbol{M}]^{\mathrm{T}}]\delta(t) \quad (15)$$

另一方面，由系统(6)有以下恒等式

$$2[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{T}_1 + \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{T}_2]\cdot[\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-h(t)) - \dot{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}_\omega\boldsymbol{\omega}(t)] = 0 \quad (16)$$

其中，$\boldsymbol{T}_1$、$\boldsymbol{T}_2$ 为适当维数的自由权矩阵。

把式(11)~式(16)代入式(10)中，并定义增广向量

$$\boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_\delta) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t)) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_M) \;\; \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t) \;\; \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s \;\; \int_{t-h_M}^{t-h_\delta}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s \;\; \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)]$$

则 $\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)$ 可表示为

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{\Pi} + (h_M-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_\delta)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\zeta}_1(t) \quad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{P}_{13} & \Xi_{15} & \Xi_{16} & \boldsymbol{P}_{23} & \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{B}_\omega \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & 0 & \Xi_{26} & \Xi_{27} & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & -\boldsymbol{P}_{23}^{\mathrm{T}} & -\boldsymbol{P}_{33}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & * & * & \Xi_{55} & \boldsymbol{P}_{12} & \boldsymbol{P}_{13} & \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{B}_\omega \\ * & * & * & * & * & \Xi_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{R}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

对于给定的 γ，考虑性能指标 $\boldsymbol{J}(\omega)$，则把 $z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t)-\gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ 加到不等式(17)两边，可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t) + z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_1^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta} + (h_M-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_\delta)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\zeta}_1(t) \quad (18)$$

其中，$\overline{\boldsymbol{\Pi}}=\boldsymbol{\Pi}+\mathrm{diag}\{0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, -\gamma^2\boldsymbol{I}\}$，

$\boldsymbol{\Theta}=[\boldsymbol{C}_k \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0 \;\, 0]$。

如果

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta} + (h_M-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_\delta)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} < 0 \quad (19)$$

那么

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t) + z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant 0 \quad (20)$$

当 $\boldsymbol{\omega}(t)=0$ 时，$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t)<0$，则系统(6)是渐近稳定的；当 $\boldsymbol{\omega}(t)\neq 0$ 时，式(18)两边对 t 从 0 到 ∞ 积分，并注意到在零初始条件下，有 $\boldsymbol{V}(t)|_{t=0}$，得到

$$\int_0^{\infty}[\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)]\,\mathrm{d}t < -\boldsymbol{V}(t)|_{t=\infty} + \boldsymbol{V}(t)|_{t=0} < 0 \quad (21)$$

即 $\|z(t)\| < \gamma\|\boldsymbol{\omega}\|_2$，从而闭环系统在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ。

2）当 $h(t)\in[h_m,h_\delta]$ 时，构造如下 L-K 泛函

$$\begin{aligned} V_2(t) = {} & \boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\xi}_2(t) + \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \\ & \int_{t-h(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \int_{t-h_m}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s + \\ & h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \\ & (h_\delta-h_m)\int_{-h_\delta}^{-h_m}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \\ & h_\delta\int_{-h_\delta}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_3\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \int_{-h_\delta}^{-h_m}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{R}_4\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta + \\ & \frac{h_\delta^2}{2}\int_{-h_\delta}^{0}\int_{\theta}^{0}\int_{t+\lambda}^{t}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)Z\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta \text{ CB} \end{aligned}$$

其中，

$\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \;\; \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s \;\; \int_{t-h_\delta}^{t-h_m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s]$、$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}_i(i=1,2,3)$、$\boldsymbol{R}_j(i=1,2,3,4)$、$\boldsymbol{Z}$ 如同式(6)中所定义。用同样的处理方法，可以得到

$$\dot{\boldsymbol{V}}_2(t) + z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant \boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta} + (h_\delta-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_m)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\zeta}_2(t) \quad (22)$$

其中，

$$\boldsymbol{\zeta}_2^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_\delta) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h(t)) \;\; \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-h_m) \;\; \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t) \;\; \int_{t-h_\delta}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s \;\; \int_{t-h_\delta}^{t-h_m}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\,\mathrm{d}s]$$

如果

$$\overline{\boldsymbol{\Pi}} + \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta} + (h_\delta-h(t))\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} + (h(t)-h_m)\boldsymbol{N}\boldsymbol{R}_4^{-1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} < 0 \quad (23)$$

那么

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1(t) + z(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}(t) - \gamma^2\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \leqslant 0 \quad (24)$$

从而闭环系统在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ。

由于 $h_M-h_\delta=h_\delta-h_m=\delta$，对式(19)或式(23)应用引理 3 以及 Schur 补，即可得定理 1 中的式(7)和式(8)。

3　H_∞ 非脆弱控制器的设计

本节在第 2 节 BRL 的基础上，设计非脆弱 H_∞ 控制器。

定理 2. 对于给定常数 h_m、h_M、μ 和 γ，如果存在标量 $\varepsilon_k \geqslant 0\,(k=1,2)$，正定对称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \widetilde{P}_{12} & \widetilde{P}_{13} \\ * & \widetilde{P}_{22} & \widetilde{P}_{23} \\ * & * & \widetilde{P}_{33} \end{bmatrix}$、$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_i\,(i=1,2,3)$、$\widetilde{\boldsymbol{R}}_j\,(j=1,2,3,4)$、$\widetilde{\boldsymbol{Z}}$；适当维数的自由矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_a$、$\widetilde{\boldsymbol{N}}_a$，$(a=1,2,3)$，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$，使得如下 LMIs 成立：

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_1 & \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_a^{\mathrm{T}} & \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_E^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_1 \boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_2 & \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_a^{\mathrm{T}} & \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_E^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon_2 \boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\varepsilon_2 \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{26}$$

则系统(1)在非脆弱控制器(4)的作用下不仅渐近稳定，而且在零初始条件下具有给定的 H_∞ 扰动抑制水平 γ，且控制器增益 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$。其中，

$$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}} & \sqrt{\delta}\widetilde{\boldsymbol{N}} \\ * & -\widetilde{\boldsymbol{R}}_4 \end{bmatrix}, \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}} & \sqrt{\delta}\widetilde{\boldsymbol{M}} \\ * & -\widetilde{\boldsymbol{R}}_4 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{11} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{12} & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X} - \widetilde{\boldsymbol{P}}_{13} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{15} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{16} & \widetilde{\boldsymbol{P}}_{23} & \boldsymbol{B}_\omega & \boldsymbol{X}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_u^{\mathrm{T}} \\ * & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{22} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{23} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{24} & 0 & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{26} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{27} & 0 & 0 \\ * & * & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{33} & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{34} & \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{44} & 0 & -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{23}^{\mathrm{T}} & -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{33}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{55} & \widetilde{\boldsymbol{P}}_{12} & \widetilde{\boldsymbol{P}}_{13} & \boldsymbol{B}_\omega & 0 \\ * & * & * & * & * & \widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{66} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\widetilde{\boldsymbol{R}}_2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\gamma^2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}_\omega^{\mathrm{T}} \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\boldsymbol{I} \end{bmatrix},$$

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{11} = \widetilde{\boldsymbol{P}}_{12} + \widetilde{\boldsymbol{P}}_{12}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{W}} - \widetilde{\boldsymbol{R}}_3 - h_\delta^2\widetilde{\boldsymbol{Z}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{12} = \widetilde{\boldsymbol{R}}_3 - \widetilde{\boldsymbol{P}}_{12} + \widetilde{\boldsymbol{P}}_{13}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{15} = \widetilde{\boldsymbol{P}}_{11} - \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{16} = \widetilde{\boldsymbol{P}}_{22}^{\mathrm{T}} + h_\delta\widetilde{\boldsymbol{Z}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{22} = -\widetilde{\boldsymbol{R}}_3 - \widetilde{\boldsymbol{Q}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{N}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{N}}_1^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{23} = -\widetilde{\boldsymbol{N}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{M}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{N}}_2^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{24} = -\widetilde{\boldsymbol{M}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{N}}_3^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{26} = -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{22}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{P}}_{23}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{27} = -\widetilde{\boldsymbol{P}}_{32}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{P}}_{33}^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{33} = -(1-\mu)\widetilde{\boldsymbol{Q}}_2 - \widetilde{\boldsymbol{N}}_2 - \widetilde{\boldsymbol{N}}_2^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{M}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{M}}_2^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{34} = -\widetilde{\boldsymbol{M}}_2 - \widetilde{\boldsymbol{N}}_3^{\mathrm{T}} + \widetilde{\boldsymbol{M}}_3^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{44} = -\widetilde{\boldsymbol{Q}}_3 - \widetilde{\mathrm{M}}_3 - \widetilde{\boldsymbol{M}}_3^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{55} = \widetilde{\mathrm{H}} - \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{66} = -\widetilde{\boldsymbol{R}}_1 - \widetilde{\boldsymbol{Z}}$，$\delta = (h_M - h_m)/2$，

$h_\delta = \dfrac{(h_M + h_m)}{2}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}} = h_\delta^2\widetilde{\boldsymbol{R}}_3 + (h_M - h_\delta)\widetilde{\boldsymbol{R}}_4 + \dfrac{1}{4}h_\delta^4\widetilde{\boldsymbol{Z}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{W}} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_1 + \widetilde{\boldsymbol{Q}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{Q}}_3 + h_\delta^2\widetilde{\boldsymbol{R}}_1 + (h_M - h_\delta)^2\widetilde{\boldsymbol{R}}_2$，

$\widetilde{\boldsymbol{N}} = [0 \quad \widetilde{\boldsymbol{N}}_1^{\mathrm{T}} \quad \widetilde{\boldsymbol{N}}_1^{\mathrm{T}} \quad \widetilde{\boldsymbol{N}}_1^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{M}} = [0 \quad \widetilde{\boldsymbol{M}}_1^{\mathrm{T}} \quad \widetilde{\boldsymbol{M}}_1^{\mathrm{T}} \quad \widetilde{\boldsymbol{M}}_1^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_a = [\widetilde{\varepsilon\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} \ 0\ 0\ 0\ \widetilde{\varepsilon B}^{T}\ 0\ 0\ 0\ \widetilde{\varepsilon\boldsymbol{D}}_u^{\mathrm{T}}\ 0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_a$，

$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}_E = [\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$。

证明：由于定理 1 中式(7)和式(8)给出的条件为非线性矩阵不等式，不能直接得到控制器的解。下面给出控制器的设计方法，首先将式(7)和式(8)中的不确定项(即含 ΔK 项)分离，即

$$\boldsymbol{\Xi}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{F}_a(t)\boldsymbol{\Gamma}_E + \boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}_a < 0 \tag{27}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2 + \boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{F}_a(t)\boldsymbol{\Gamma}_E + \boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}_a < 0 \tag{28}$$

其中

$\boldsymbol{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}' & \sqrt{\delta}\boldsymbol{N} \\ * & -\boldsymbol{R}_4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}' & \sqrt{\delta}\boldsymbol{M} \\ * & -\boldsymbol{R}_4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Xi}'$ 为 $\boldsymbol{\Xi}$ 中分离不确定项(含 $\Delta\boldsymbol{K}$ 项)所得结果。对以上两式应用引理 4 可得：

$$\boldsymbol{\Xi}_1 + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{T}} + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_E < 0 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2 + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{T}} + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_E < 0 \tag{30}$$

其中

$\boldsymbol{\Gamma}_a = [(\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} \ 0\ 0\ 0\ (\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} \ 0\ 0\ 0\ \boldsymbol{D}_u^{\mathrm{T}} \ 0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_a$，

$\boldsymbol{\Gamma}_E = [\boldsymbol{E}_a \ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$。

进而对式(29)和式(30)应用 Schur 补可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_1 & \boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{T}} & \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{31}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_2 & \boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{T}} & \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_E^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon\boldsymbol{I} & 0 \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 \tag{32}$$

令 $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{X}^{-1}$，其中 $\boldsymbol{X}$ 为非奇异矩阵，对式(31)和式(32)两边左乘 $\boldsymbol{\varPsi}$，右乘其转置，其中

$$\boldsymbol{\varPsi} = \mathrm{diag}\{\underbrace{\boldsymbol{X} \ \cdots \ \boldsymbol{X}}_{7} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{X} \quad \varepsilon^{-1}\boldsymbol{I} \quad \varepsilon^{-1}\boldsymbol{I}\}$$

令，$\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i,j} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{P}_{i,j}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{R}}_i = \boldsymbol{X}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{Q}_j\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{M}}_j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{M}_j\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\widetilde{\boldsymbol{N}}_j = \boldsymbol{X}\boldsymbol{N}_j\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，通过替换容易得到定理 2 的条件，证毕。

4　设计实例

下面以 VTOL 直升机为对象进行仿真，其模型参数如下：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.0100 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.3681 & -0.7070 & 1.4200 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}-0.0110 & 0.0081 & 0.0056 & -0.1366\\ 0.0145 & -0.3030 & 0.0007 & -1.2062\\ 0.0301 & 0.1104 & -0.2121 & 0.4260\\ 0 & 0 & 0.3000 & 0\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{B}_u=\begin{bmatrix}0.4422 & 0.1761\\ 3.5446 & -7.5922\\ -5.5200 & 4.4900\\ 0 & 0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_\omega=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},
$$

$\boldsymbol{C}=[0\quad 0\quad 0\quad 1]$,$\boldsymbol{D}_u=[0.1\quad 0.1]$,$\boldsymbol{D}_\omega=0$

当不加外部控制(即 $u(t)=0$)时,该系统的开环响应曲线如图 1 所示,显然系统是不稳定的。

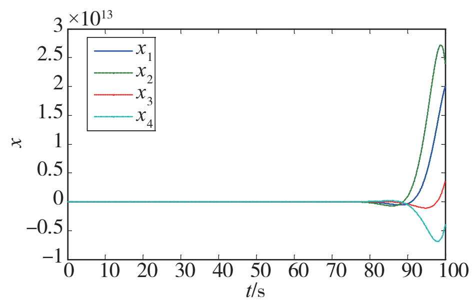

图 1　VTOL 系统状态开环响应曲线

Fig. 1　Response of state with the open-loop system of VTOL

下面分析系统在控制器作用下的镇定性能。设时滞下界 $h_m=0$,首先在无外部干扰和控制器增益摄动的情况下设计控制器。当 $h_M=7$ 时,由定理 1 可求得状态反馈矩阵为

$$
\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.3752 & 2.9645 & 3.1834 & 2.7087\\ -0.1350 & 1.3463 & 1.7498 & 1.3965\end{bmatrix}
$$

将其代入系统方程可得系统各状态响应曲线,如图 2 所示。

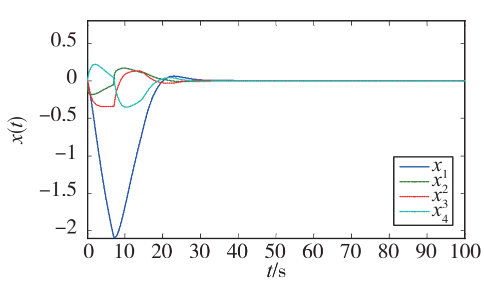

图 2　VTOL 系统状态闭环响应曲线

Fig. 2　Response of state with the closed-loop system of VTOL

可见在控制器的作用下,系统各状态很快收敛,且具有较好的稳定性能。

为了进一步分析控制器的非脆弱性能。假设在幅值 0.1 的正弦干扰和控制器增益摄动的情况下,针对 $h_M=7$ 的定常时滞进行仿真,其中摄动参数取为:

$$
\boldsymbol{D}_a=\begin{bmatrix}0.5 & 0.01\\ 0.01 & 0.05\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{E}_a=\begin{bmatrix}0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6\\ -0.6 & -0.6 & -0.6 & -0.6\end{bmatrix}
$$

扰动矩阵 $\boldsymbol{F}_a\in\boldsymbol{R}^{2\times2}$,则由定理 2 可求得最小的干扰抑制水平 $\gamma=0.9716$,相应的控制增益矩阵为

$$
\boldsymbol{K}_1=\begin{bmatrix}-4.8317 & -4.3978 & 5.0841 & 18.1927\\ 0.5229 & 4.0719 & 3.1375 & 13.2571\end{bmatrix}
$$

在非脆弱控制器 $\boldsymbol{K}_1$ 的作用下,系统状态响应曲线如图 3 所示。

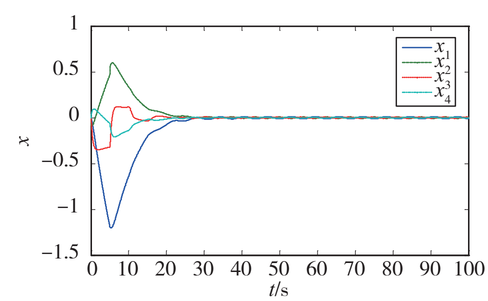

图 3　鲁棒非脆弱控制器下系统状态响应曲线

Fig. 3　Response of state with robust non-fragile controller

当控制器不存在增益摄动时(即设摄动参数 $\boldsymbol{D}_a$ 和 $\boldsymbol{E}_a$ 为零),同样取 $\gamma=0.9716$,由定理 2 可得一般鲁棒控制器增益矩阵

$$
\boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}-0.7716 & -1.3898 & 4.2421 & 11.7129\\ -0.0790 & 2.9695 & 1.0174 & 6.7943\end{bmatrix}
$$

相应的系统状态响应曲线如图 4 所示。

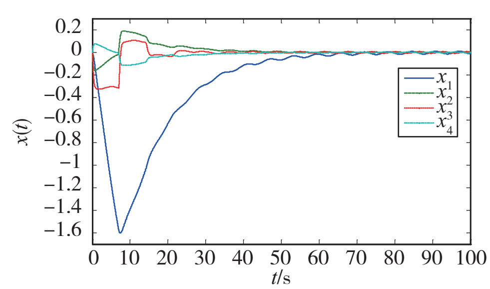

图 4　一般鲁棒控制器下系统状态响应曲线

Fig. 4　Response of state with robust controller

以状态 $x_1(t)$ 为研究对象,图 5 给出了在相同条件下,非脆弱控制器和一般鲁棒控制器下的镇定效果比较。

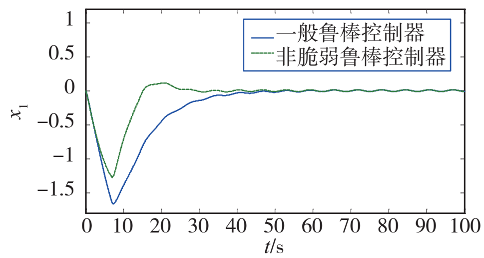

图 5　不同控制器作用下的状态 x_1 响应曲线

Fig. 5　Response of state x_1 with different controller

由图 3～图 5 可以看出，当存在控制器增益摄动时，非脆弱控制器 $\boldsymbol{K}_1$ 与一般控制器 $\boldsymbol{K}_2$ 相比，系统状态在控制器 $\boldsymbol{K}_1$ 的作用下，能够满足一定的性能指标，且容许控制器增益的摄动；而在 $\boldsymbol{K}_2$ 的作用下表现出明显的脆弱性，系统状态振荡较大，收敛较慢。

5　结论

本文针对含有飞行时滞的 VTOL 直升机系统设计了鲁棒非脆弱 H_∞ 控制器。通过设计 L-K 泛函并结合 LMI 的方法得到了系统稳定的 BRL 条件和非脆弱控制器。该控制器无需任何的参数调整和迭代处理即可求解。将控制器应用于 VTOL 直升机的飞行过程，仿真过程表明了所设计的控制器相比一般鲁棒控制器具有更好的镇定性能和非脆弱性。

参考文献

[1] Gu K, Kharitonov V L, Chen J. Stability of time-delay systems [M]. Basel: Birkhauser, 2003: 1-17.

[2] Richard J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems [J]. Automatica, 2003, 39 (10): 1667-1694.

[3] 王武，杨富文．不确定时滞系统的时滞依赖鲁棒非脆弱 H_∞ 控制[J]．控制理论与应用，2003，20(3)：473-476.

[4] Keel L H, Bhattacharyya S P. Robust, fragile, or optimal [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1997, 42 (8): 1098-1105.

[5] 吴敏，肖伸平，张先明，等．中立型系统的时滞相关非脆弱 H_∞ 控制[J]．系统工程与电子技术，2008，30(9)：1768-1773.

[6] Wang C, Shen Y. Delay-dependent non-fragile robust stabilization and H_∞ control of uncertain stochastic systems with time-varying delay and nonlinearity [J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(8): 2174-2190.

[7] Zhang J H, Shi P, Yang H J. Non-fragile robust stabilization and H_∞ control for uncertain stochastic nonlinear time-delay systems [J]. Chaos, Solitons Fractals, 2009, 42 (5): 3187-3196.

[8] Yang J, Zhong S M, Xiong L L. A descriptor system approach to non-fragile H_∞ control for uncertain fuzzy neutral systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160 (4): 423-438.

[9] 付兴建，刘小河．带不确定时滞的中立型系统之鲁棒非脆弱保性能控制[J]．控制理论与应用，2008，25(5)：938-942.

[10] 李涛，张合新，孟飞．一类分布时滞不确定系统的鲁棒非脆弱保性能控制器设计[J]．控制与决策，2011，26(10)：1520-1524.

[11] Lien C H. Non-fragile guaranteed cost control for uncertain neutral dynamic systems with time-varying delays in state and control input [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 31(4): 889-899.

[12] Kim J H. Delay-dependent robust and non-fragile guaranteed cost control for uncertain singular systems with time-varying state and input delays [J]. International Journal of Control, Automation, and Systems 2009, 7(3): 357-364.

[13] Parlakci M N. Improved robust stability criteria and design of robust stabilizing controller for uncertain linear time-delay systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2006, 16(13): 599-636.

[14] Zhang X M, Han Q L. A delay decomposition approach to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(17): 1922-1930.

[15] Ramakrishnan K, Ray G. Delay-range-dependent stability criterion for interval time-delay systems with nonlinear perturbations [J]. International Journal of Automation and Computing, 2011, 8(1): 141-146.

[16] Yue D, Tian E G, Zhang Y J. A piecewise analysis method to stability analysis of continuous/discrete systems with time-varying delay [J]. International Journal Robust Nonlinear Control, 2009, 19(13): 1493-1518.

[17] Petersen I R, Hollot C V. A Riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems [J]. Automatica, 1986, 22(4): 397-411.