

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2017.02.013

# 半球谐振陀螺的基础理论研究

方 针,刘书海,余 波

(中国电子科技集团公司第二十六研究所,重庆 400060)

**摘 要:**针对半球谐振陀螺的几个基本理论问题,对包括环形谐振子和半球谐振子的动力学理论、控制理论和信号处理理论等进行了系统的阐述和总结,建立了包括谐振子振动频率和进动特性、激励系统稳定性、信号处理等在内的半球谐振陀螺的基本理论框架,以为今后的具体工程提供理论指导。

**关键词:**半球谐振陀螺;谐振子;参数激励;信号理论

**中图分类号:** TN384

**文献标志码:** A

**文章编号:** 2095-8110(2017)02-0072-07

## Study of Basic Theories of Hemispherical Resonator Gyros

FANG Zhen, LIU Shu-hai, YU Bo

(The 26th Research Institute of China Electronic Technology Group Corporation, Chongqing 400060, China)

**Abstract:** Based on several basic theoretical issues of hemispherical resonator gyros, the dynamic theory of resonator and hemispherical resonator, the control theory and signal processing theory have been systematically described and summarized. The basic theoretical framework of hemispherical resonator gyros, including the theories of resonant vibration, precession, stability of excitation system and signal processing method have been established to provide theoretical guidance for future specific projects.

**Key words:** Hemispherical resonator gyros; Resonator; Parametric stimulus; Signal theory

### 0 引言

半球谐振陀螺是一种高精度的振动陀螺,以其可连续工作 15 年并维持高于 0.99 的可靠度的突出特点,在卫星、导弹、定向钻井等应用领域受到广泛的关注,特别是在空间应用中占有独特的优势<sup>[1-2]</sup>。

由于同时涉及运动学、动力学、静电力学、声学等多门学科的交叉,半球谐振陀螺是一个复杂的系统,为了更好地理解其工作机理,并对未来的工作提供有益的理论根据,需要对其基本理论进行系统的阐述和

总结。本文从环形谐振子出发,详细地探讨了关于半球谐振陀螺的几个基本理论问题,通过对这一系列理论问题的阐述,建立了从谐振子动力学理论到参数激励,再到信号处理理论的半球谐振陀螺基本框架。

### 1 环形谐振子的动力学方程

环形谐振子是半球谐振子在二维空间中的简易模型,由于两者均具相同的四波腹振型,且该振型下具有相同的动力学特性,因此为了简化模型,可用环形谐振子的模型研究半球谐振子的唇缘。为了更好地阐述半球谐振子的动力学特性,我们首

**收稿日期:** 2017-01-23; **修订日期:** 2017-02-28

**基金项目:** 科工局民用航天项目:半球谐振陀螺仪薄弱环节改进及可靠性提升技术研究(无编号);十三五预研:微系统抗电离辐射加固技术及验证研究(4140A11040105);预研基金:高精度半球谐振陀螺及系统误差机理研究(9140A0901215DZ36025)

**作者简介:** 方针(1962-),男,博士,研究员,主要从事半球谐振陀螺技术方面的研究。E-mail: hrg@sipat.com

先对环形谐振子的动力学方程进行推演。

假设环形谐振子为半径为  $R$  的不可拉伸环,且在自身平面内以角速度  $\Omega$  旋转。 $v$  和  $w$  分别为谐振子微元在切向和径向方向的位移。

则根据弹性力学理论可以得到环形谐振子微元的动能  $T$  和势能  $P^{[1]}$  :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \rho S [(\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2] \\ P = \frac{EI}{2R^4} (w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2})^2 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\rho$ 、 $S$ 、 $E$  和  $I$  分别为环的材料密度、环的截面积、杨氏模量和横截面相对弯曲轴的惯性矩。

则拉格朗日算子可写为

$$L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w') = \frac{1}{2} \{ [(\dot{v} + R\Omega - w\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega)^2] - \frac{EI}{\rho SR^4} (w + w'')^2 \} \quad (2)$$

为了获得环形谐振子的动力学方程,需要使用哈密顿原理(最小作用量原理),使系统的运动积分取最小值,则可以得到:

$$\begin{cases} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} (L - \lambda(t, \varphi) f(v', w)) dt d\varphi = \min \\ f(v', w) = v' - w = 0 \end{cases} \quad (3)$$

通过对式(3)进行全导数处理,得到等效的偏微分方程:

$$\begin{cases} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + \dot{\Omega}(R - w) - \Omega^2 v + \lambda' = 0 \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + \Omega^2(R - w) + EI\rho^{-1}S^{-1}R^{-4}(w^{(4)} + 2w'' + w) + \lambda = 0 \\ v' - w = 0 \end{cases} \quad (4)$$

这是自由环的运动方程。为了简化模型,此处我们假设转动角速度较小且无角加速度。如果环受到外加驱动力的作用,则需要将单位载荷在切向和径向上的分量  $p_v$  和  $p_w$  添加到自由环的运动方程中。简化后能够得到理想弹性不可拉伸环的动力学方程

$$\ddot{w} - \ddot{v} + 4\Omega\dot{w}' + EI\rho^{-1}S^{-1}R^{-4}(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'') = (p_w'' - p_v')/\rho S \quad (5)$$

此为环形谐振子的受迫振动。倘若进一步考虑满足非弹性变形的线性损耗,则环形谐振子的动力学方程需要写为

$$\begin{aligned} \ddot{w} - \ddot{v} + 4\Omega\dot{w}' + \frac{EI}{\rho SR^4}(w^{(6)} + 2w^{(4)} + w'') \\ + \frac{\xi EI}{\rho SR^4}(\dot{w}^{(6)} + 2\dot{w}^{(4)} + \dot{w}'') \\ = \frac{1}{\rho S}(p_w'' - p_v') \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\xi$  为阻尼因子,同品质因数的关系是  $Q = 1/(\omega_0 \xi)$ ,  $\omega_0$  为固有振动频率。

根据对称性,将谐振子 2 阶径向振动位移  $w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi$  代入动力学方程中,容易得到环形谐振子的进动因子为<sup>[3]</sup>

$$K = -\frac{2}{2^2 + 1} = -0.4$$

求得的进动因子为负,说明驻波进动方向与旋转方向相反。进动因子的绝对值限于 1,说明仪器壳体在旋转过程中,驻波的旋转角度要小于陀螺基座的旋转角度。因此利用进动因子,在确定驻波相对仪器壳体(载体)的位置就可以得到有关陀螺基座在惯性空间转动的角度信息。

## 2 半球谐振子的动力学方程

相较于环形谐振子,半球谐振子可以认为是由无数直径不同的环形谐振子所组成,但这些环形谐振子之间的变形和应力需要满足薄壳弹性力学的束缚。

为了获得半球谐振子的动力学方程,并计算得到相关的振动频率和进动因子,以期对实际应用中的陀螺提供理论指导,首先需要建立弹性球壳模型,得到振动位移不同分量间的限制条件。

如图 1 所示,建立与半球壳固联的坐标系。

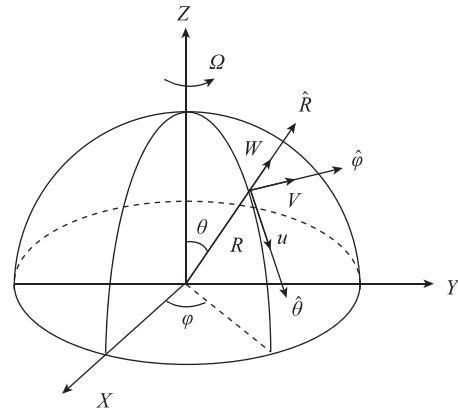


图 1 球坐标系中的半球壳

Fig. 1 Hemisphere shell in spherical coordinates

根据弹性力学理论,可以得到不可拉伸半球薄壳的中面法向应变和切向应变分别为<sup>[4-5]</sup>:

$$\begin{cases} \epsilon_{\theta} = \frac{1}{R}(w + \frac{\partial u}{\partial \theta}) \\ \epsilon_{\varphi} = \frac{1}{R}(u \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w) \\ \epsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{R}(-v \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta}) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \lambda_{\dot{\theta}} = \frac{1}{R^2} \left( -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ \lambda_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{R^2} \left( u \cot \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right) \\ \lambda_{\dot{\theta}\dot{\varphi}} = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \cos \theta + \right. \\ \left. 2 \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi} \right) \right] \end{cases} \quad (8)$$

假设半球球壳不可拉伸,因此令法向应变为零可以得到不同角 $\theta$ 处微元间的关系函数,又称为瑞利函数<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} U(\theta) = V(\theta) = \sin \theta \cdot \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \\ W(\theta) = -(2 + \cos \theta) \cdot \tan^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (9)$$

该函数制约了半球壳上不同微元位移间的关系。

因此,根据对称性容易得到半球谐振子的2阶振动位移<sup>[1,6]</sup>:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(\theta) \cos 2\varphi \\ V(\theta) \sin 2\varphi \\ W(\theta) \cos 2\varphi \end{bmatrix} p(t) + \begin{bmatrix} U(\theta) \sin 2\varphi \\ -V(\theta) \cos 2\varphi \\ W(\theta) \sin 2\varphi \end{bmatrix} q(t) \quad (10)$$

至此,得到半球谐振子的2阶振动中不同 $\theta$ 角的圆环薄壳间的限制条件。

为了进一步阐述半球谐振陀螺的工作机理,在此以布勃诺夫-加缪尔金和正则方程两种方法对陀螺的进动和振动频率进行推导。

## 2.1 布勃诺夫-加缪尔金法

根据振动位移,可以写出微面元的具体位移:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= u\hat{\theta} + v\hat{\varphi} + w\hat{R} \\ &= [U(\theta) \cos 2\varphi \cdot \hat{\theta} + V(\theta) \sin 2\varphi \cdot \hat{\varphi} + \\ &\quad W(\theta) \cos 2\varphi \cdot \hat{R}] p(t) + \\ &\quad [U(\theta) \sin 2\varphi \cdot \hat{\theta} - V(\theta) \cos 2\varphi \cdot \hat{\varphi} + \\ &\quad W(\theta) \sin 2\varphi \cdot \hat{R}] q(t) \\ &= \mathbf{k}_p p(t) + \mathbf{k}_q q(t) \end{aligned} \quad (11)$$

则根据布勃诺夫-加缪尔金法(即谐振子在两种正交波形叠加振动下保持能量不变)可以得到关系式<sup>[1]</sup>:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}_p \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}_q \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\mathbf{F}$ 为各质点所受的合力。

代入科里奥利力、离心力并假设外载荷为0,则

可以将积分展开为( $\omega_0$ 为固有振动频率):

$$\begin{cases} m\ddot{p} + 4\Omega b\dot{q} + (m\omega_0^2 - c\Omega^2)p = 0 \\ m\ddot{q} - 4\Omega b\dot{p} + (m\omega_0^2 - c\Omega^2)q = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$m = \int_0^\theta (U^2(\theta) + V^2(\theta) + W^2(\theta)) \sin \theta d\theta,$$

$$b = \int_0^\theta (U(\theta)V(\theta)\cos\theta + V(\theta)W(\theta)\sin\theta) \sin\theta d\theta,$$

$$c = \int_0^\theta (U^2(\theta)\cos^2\theta + 2U(\theta)W(\theta)\sin\theta\cos\theta + V^2(\theta) + W^2(\theta)\sin^2\theta) \sin\theta d\theta$$

解得振动频率和进动因子分别为:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - [(mc - 4b^2)/m^2]\Omega^2} \quad (14)$$

$$K(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} \frac{2b}{m} \approx -0.277 \quad (15)$$

这种方法主要用到谐振子振动的驻波特性,能够快速得到较为精确的动力学方程<sup>[7]</sup>。

## 2.2 正则方程法

在分析力学中,通常可以采用拉格朗日方程或者哈密顿方程等一系列正则方程对复杂的动力学问题进行求解。这类方程所采用的坐标系或者描述方式不同,使得它们的表达形式迥然不同,但由于所表述的物理本质完全相同,因此可以取一对半球谐振陀螺的动力学特性进行分析。

在此,采用拉格朗日方程进行分析,因为它形式较为简单。类似于对环形谐振子的推导,为了获得拉格朗日函数,需要对半球谐振子球壳的动能和势能进行描述。

根据弹性理论可以得到薄壳的动能和势能(其中 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 分别为底端角和顶端角):

$$\begin{aligned} T &= \rho h R^2 / 2 \cdot \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + 2\Omega [ (u\dot{v} - \\ &\quad v\dot{u}) \cos \theta + (v\dot{w} - w\dot{v}) \sin \theta ] \} \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \\ P &= \frac{EhR^2}{2(1-\mu^2)} \int_0^{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [ (\epsilon_\theta^2 + \epsilon_\varphi^2 + 2\mu\epsilon_\theta\epsilon_\varphi + \frac{1-\mu}{2}\epsilon_{\dot{\theta}\dot{\varphi}}^2) + \\ &\quad \frac{h^2}{12} (\lambda_\theta^2 + \lambda_\varphi^2 + 2\mu\lambda_\theta\lambda_\varphi + \frac{1-\mu}{2}\epsilon_{\dot{\theta}\dot{\varphi}}^2) ] \cdot \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (16)$$

代入位移公式和应力可以将动能和势能简化成形如:

$$\begin{cases} T = \pi [ m(\dot{p}^2 + \dot{q}^2) + 2\Omega b(\dot{p}q - p\dot{q}) ] \\ P = \pi k(p^2 + q^2) \end{cases} \quad (17)$$

式中,

$$m = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (U^2(\theta) + V^2(\theta) + W^2(\theta)) \sin \theta d\theta,$$

$$b = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (U(\theta)V(\theta)\cos\theta + V(\theta)W(\theta)\sin\theta) \sin\theta d\theta,$$

$$k = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{ [(W + \frac{\partial U}{\partial \theta})^2 \sin\theta + [\frac{2V}{\sin\theta} + U\arctan\theta + W]^2 \sin\theta] + [2\mu(W + \frac{\partial U}{\partial \theta})(\frac{2V}{\sin\theta} + U\arctan\theta + W)\sin\theta] + [\frac{1-\mu}{2}(-\frac{2U}{\sin\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} - V\arctan\theta)^2 \sin\theta] \} + \frac{h^2}{12} \{ [\frac{1}{R^2}(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial W^2}{\partial^2 \theta})^2 \sin\theta] + [\frac{1}{R^2 \sin\theta}(\frac{4W}{\sin\theta} + 2V - \frac{\partial W}{\partial \theta} \cos\theta + U \cos\theta)^2] + [\frac{2\mu}{R^2}(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial W^2}{\partial^2 \theta})(\frac{4W}{\sin\theta} + 2V - \frac{\partial W}{\partial \theta} \cos\theta + U \cos\theta)] + [\frac{1-\mu}{2R^2 \sin\theta}(2\frac{\partial W}{\partial \theta} - 2W\arctan\theta - 2U + \frac{\partial V}{\partial \theta} \sin\theta - V \cos\theta)] \} d\theta$$

则可得拉格朗日函数

$$L(p, q, \dot{p}, \dot{q}) = T - P$$

在不考虑阻尼的影响下,可写出谐振子振动的动力学方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}}) - \frac{\partial L}{\partial p} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

将拉格朗日函数代入式(18),展开后可得到:

$$\begin{cases} \dot{p} + \Omega \frac{2b}{m} \dot{q} + \frac{k}{m} p = 0 \\ \ddot{q} - \Omega \frac{2b}{m} \dot{p} + \frac{k}{m} q = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式中,  $-2b/m$  为半球谐振子的进动因子,将式(17)中的积分  $b$  和  $m$  代入式(19)后,取低端角  $0$  和顶端角  $\pi/2$  时,可求得进动因子约为  $-0.277$ ;同时  $\omega = \sqrt{k/m}$  为谐振子二阶模态的振动频率。

从表 1 的计算结果可以看出,底端角的变化无论是对振动频率还是进动因子,影响都是非常小的;对比而言,顶端角的微小变化就会引起频率和进动因子的巨大变化,因此,为了提高谐振子的抗冲击能力,同时又不影响其振动特性,可以考虑尝试在球壳根部设计适当的圆角,以达到限制陀螺的一阶振动来抵抗外部冲击的效果,同时也不对半球谐振子的振动特性产生较大的影响。

表 1 不同低端角和顶端角对频率和进动因子的影响

Tab. 1 The influence of the shell shape on frequency and K

	2 阶振动频率/Hz	进动因子
底端角 $0$	4510	$-0.2770$
顶端角 $\pi/2$		
底端角 $\pi/6$	4438	$-0.2773$
顶端角 $\pi/2$		
底端角 $0$	4975	$-0.2285$
顶端角 $13\pi/30$		

除此之外,还可以看出半球谐振子的进动因子要小于环形谐振子的进动因子,其理论方面的原因主要来自于振动所必须的几何限制条件(式(9)和式(10))。理论上具有较大进动因子的环形谐振子应该是最具有潜力的谐振子,但是由于其没有支撑,在实际应用中我们最终选取了半球状谐振子作为陀螺谐振子。

### 3 谐振子的参数激励及其稳定性

在推得谐振子的动力学方程之后,如何实现其稳定工作是接下来需要解决的问题。在外界载荷的驱动下,为实现谐振子稳定振动且能够被外接信号控制,需要对其参数激励理论进行深入的研究。

参数激励是借助围绕在谐振子唇边边缘的环形电极实现的,通过对参数激励的研究可以寻求一种实现系统稳定的激励参数。设谐振子和环形电极间的电压为  $V = V_0 \cos lt$ ,电压频率  $l$  接近谐振子的固有振动频率  $\omega_0$ 。

为了简化计算,在此以环形谐振子为例,假设施加于谐振子上的切向电场分量为零,同时将其法向分量按位移  $w$  的幂指数展开,由于仅考虑陀螺的线性工作区域,且由于位移相较于环形谐振子的半径而言可以忽略不计,在此取一阶精度近似展开为:

$$\begin{aligned} p_w &= -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{LV^2}{(d_0 + w)^2} \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{LV^2}{d_0^2 [1 + \frac{2w}{d_0} + (\frac{w}{d_0})^2]} \\ &\approx -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{LV^2}{d_0^2 [1 + \frac{2w}{d_0}]} \\ &\approx -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{LV^2}{d_0^2} [1 - \frac{2w}{d_0}] \\ &\approx -\frac{\epsilon_0}{2} \frac{LV^2}{d_0^2} + \frac{\epsilon_0 LV^2 w}{d_0^3} \end{aligned}$$

其中,  $L$  为谐振子和电极的高度,  $\epsilon_0$  为真空介

电常数,  $d_0$  为未振动时谐振子同电极间的间距。由于  $p_w$  的展开项中第一项为不变量, 主要影响谐振子的零阶振动, 因此在考虑谐振子二阶振动的情况时, 可以仅仅取一阶小项进行分析

$$p_w \approx \frac{\epsilon_0 L_0 V^2 \omega}{d_0^3} \quad (20)$$

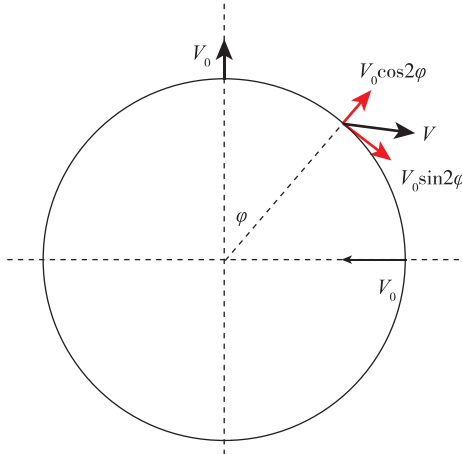


图2 环形谐振子二阶振动的速度关系示意图  
Fig. 2 The schematic diagram of the point velocity in the 2nd order mode

由于主要研究二阶振动, 图2所示为二阶环形谐振子质点间的速度关系示意图, 其中黑色部分和红色部分分别为质点方位角  $\varphi$  处质点的速度和分速度, 根据  $0^\circ$  和  $45^\circ$  方向的振动相互影响合成, 可以将环形谐振子的动力学方程(6)的解写成如下形式 ( $w(t, \varphi)$  为任意质点的径向速度):

$$w(t, \varphi) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi \quad (21)$$

其中,  $p(t)$  和  $q(t)$  分别为方位角为  $0^\circ$  和  $45^\circ$  方向振动的振幅。

除此之外, 通过将速度进行傅里叶展开, 并结合二阶振型的几何特征, 也可以轻易得到式(21)。

将式(20)和式(21)反代回环形谐振子的动力学方程中, 并使用布波洛夫-加缪尔金法, 可以得到:

$$\begin{cases} \ddot{p}(t) - \frac{8}{5} \Omega \dot{q}(t) + \omega_0^2 \xi \dot{p}(t) + \omega_0^2 p(t) \\ = \frac{4\eta}{5} p(t) \cos^2 \omega t \\ \ddot{q}(t) + \frac{8}{5} \Omega \dot{p}(t) + \omega_0^2 \xi \dot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) \\ = \frac{4\eta}{5} q(t) \cos^2 \omega t \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{36EI}{5\rho SR^4}}$ 。

因为谐振子二阶振动频率一般为数千赫兹, 在

一个振动周期内, 可以认为  $\Omega(t)$  为慢变量, 是缓慢的时间函数。因此, 可以引入慢变量函数  $a^*(t)$ 、 $b^*(t)$ 、 $m^*(t)$  和  $n^*(t)$ , 并用它们表示  $p(t)$ 、 $q(t)$ 、 $\dot{p}(t)$  和  $\dot{q}(t)$  [1]:

$$\begin{cases} p(t) = a^*(t) \cos \omega t + b^*(t) \sin \omega t \\ q(t) = m^*(t) \cos \omega t + n^*(t) \sin \omega t \\ \dot{p}(t) = -a^*(t) \omega \sin \omega t + b^*(t) \omega \cos \omega t \\ \dot{q}(t) = -m^*(t) \omega \sin \omega t + n^*(t) \omega \cos \omega t \end{cases} \quad (23)$$

代入式(22)后取一个振动周期的平均值之后, 可以得到描述慢变量函数的方程组:

$$\begin{cases} \dot{a}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi a^* + \frac{1}{2} (\delta + \frac{1}{2} \gamma) b^* - \frac{4}{5} \Omega m^* \\ \dot{b}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi b^* - \frac{1}{2} (\delta + \frac{3}{2} \gamma) a^* - \frac{4}{5} \Omega n^* \\ \dot{m}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi m^* + \frac{1}{2} (\delta + \frac{1}{2} \gamma) n^* + \frac{4}{5} \Omega a^* \\ \dot{n}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi n^* - \frac{1}{2} (\delta + \frac{3}{2} \gamma) m^* + \frac{4}{5} \Omega b^* \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $\delta = (l^2 - \omega_0^2) / l$ ,  $\gamma = 2\eta / (5l)$ ,  $\eta = \epsilon_0 L V_0^2 / (\rho S d_0^3)$ 。

在无转动角速度情况下,  $\Omega = 0$  时, 慢变量方程组(24)的平面稳定区域的边界方程为 [1,8-9]:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \delta + 3\gamma/2 & -\omega_0^2 \xi \\ \omega_0^2 \xi & \delta + \gamma/2 \end{bmatrix} &= 0 \text{ 或者} \\ (\delta + \frac{3}{2} \gamma)(\delta + \frac{1}{2} \gamma) + \omega_0^4 \xi^2 &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

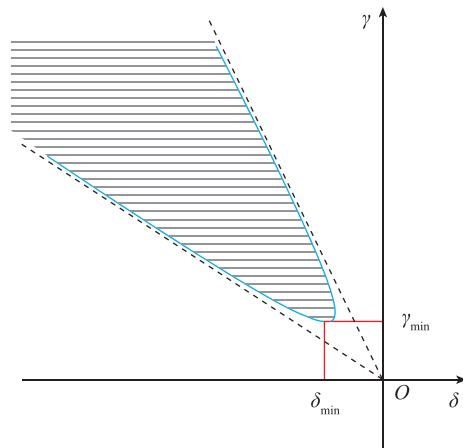


图3 稳定区域边界  
Fig. 3 Stable area boundary

其极小值点的坐标为  $\delta_{\min} = -2\omega_0^2 \xi$  和  $\gamma_{\min} = 2\omega_0^2 \xi$ 。如图3所示, 为根据式(25)描述的曲线示意图, 其中双曲线内的区域(阴影部分)对应不稳定振动, 双曲线外的区域对应稳定振动。

利用极小值点坐标可以算出优化的激励参数 (电极高度为  $h$ ):

$$\begin{cases} l = -\omega_0^2 \xi + \omega_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 \xi^2} \\ V_0 = \sqrt{5\rho S d_0^3 \omega_0^3 \xi (-\omega_0^2 \xi + \omega_0 \sqrt{1 + \omega_0^2 \xi^2})} / (\epsilon_0 h) \end{cases} \quad (26)$$

在该参数  $V = V_0 \cos lt$  激励下, 谐振子将处于稳定振动。

即当系统激励参数位于稳定振动区域内时, 有

$$(\delta + 3\gamma/2)(\delta + \gamma/2) + \omega_0^4 \xi^2 > 0$$

那么任何解均是呈指数衰减, 提供适当的反馈激励信号即可维持谐振子驻波振动。

而对于系统激励参数位于不稳定振动区域时, 有

$$(\delta + 3\gamma/2)(\delta + \gamma/2) + \omega_0^4 \xi^2 < 0$$

将会出现: 当激励信号振幅大于  $V_0$  时, 振动将逐渐增大且不稳定, 如果没有某种对振幅的限制方式, 那么振幅将不可控; 当激励信号振幅小于  $V_0$  时, 谐振子将无法振动。

因此基于优化的激励参数, 可以尝试通过施加适当的反馈信号使得谐振子稳定的工作, 这可能在陀螺的实际应用中具有重要的指导意义。

#### 4 半球谐振陀螺信号理论

在陀螺中, 谐振子驻波被稳定控制的情况下, 我们的主要任务是测量出角速度。

首先, 从第 2 节中进动理论的推导过程中, 容易得到, 被激励振动的谐振子振动过程可以表述为

$$\begin{aligned} \omega(\varphi, t) = & (a^* \cos lt + b^* \sin lt) \cos 2\varphi + \\ & (m^* \cos lt + n^* \sin lt) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (27)$$

该振动是必须满足如下条件的驻波<sup>[8-9]</sup>:

$$\det \begin{bmatrix} a^* & b^* \\ m^* & n^* \end{bmatrix} = 0 \quad (28)$$

利用式(24)进行类似于参数激励稳定性的推导, 在优化的激励参数驱动下, 当存在转动角速度情况下,  $\Omega \neq 0$  时, 有:

$$\begin{cases} \dot{a}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (a^* - b^*) - \frac{4}{5} \Omega m^* \\ \dot{b}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (b^* - a^*) - \frac{4}{5} \Omega b^* \\ \dot{m}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (m^* - n^*) + \frac{4}{5} \Omega a^* \\ \dot{n}^* = \frac{1}{2} \omega_0^2 \xi (n^* - m^*) + \frac{4}{5} \Omega n^* \end{cases} \quad (29)$$

此时将式(29)代入式(22)可以解出振动位移

$$\omega(\varphi, t) = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (m^*)^2 + (n^*)^2} \cos(lt - \alpha) \cos 2(\varphi - \vartheta) \quad (30)$$

其中,  $\alpha = \arctan \frac{b^*}{a^*}, \vartheta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{(m^*)^2 + (n^*)^2}}{\sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2}}$ 。

从振动位移表达式可以看出  $\dot{\vartheta} = -K\Omega$ 。

因此, 谐振子二阶振动过程中, 相隔  $45^\circ$  的 2 个传感器, 采集到的信号为<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (m^*)^2 + (n^*)^2} \cos(lt - \alpha) \cos 2\vartheta \\ \omega_2 = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (m^*)^2 + (n^*)^2} \cos(lt - \alpha) \sin 2\vartheta \end{cases} \quad (31)$$

通过信号解调之后, 略去  $lt$  项, 信号可表述为:

$$\begin{cases} \omega_1^* = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (m^*)^2 + (n^*)^2} \cos \alpha \cos 2\vartheta \\ \omega_2^* = \sqrt{(a^*)^2 + (b^*)^2 + (m^*)^2 + (n^*)^2} \cos \alpha \sin 2\vartheta \end{cases} \quad (32)$$

这 2 个信号均为随时间变化的信号  $\omega_1^*(t)$  和  $\omega_2^*(t)$ 。

通过信号测量和解调, 能够得到相位角  $\vartheta(t)$

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2} \arctan \frac{\omega_2^*(t)}{\omega_1^*(t)} \quad (33)$$

进而通过进动因子推算出角速度  $\Omega(t)$

$$\Omega(t) = -\frac{1}{2K} \frac{d}{dt} \left[ \arctan \frac{\omega_2^*(t)}{\omega_1^*(t)} \right] \quad (34)$$

基座的转角  $\Delta\phi$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{2K} \arctan \frac{\omega_2^*(t)}{\omega_1^*(t)} \quad (35)$$

至此, 通过式(33)、式(34)和式(35)可以测算出系统的转动角速度。

#### 5 结论

本文利用基本假设对半球谐振子的几个基本理论问题进行了推导和总结, 包括环形谐振子的动力学方程、半球谐振子的进动特性、参数激励的稳定性问题、信号采集与处理的方法等, 从谐振子的振动、稳定性和后端信号三个方面, 系统地构建了半球谐振陀螺的基本理论框架, 无论是对半球谐振陀螺理论的构建, 还是对未来实际生产的指导, 均具有重要的意义。同时, 由于本文旨在建立基本的理论框架, 在多处进行了模型简化, 例如假设角速度较小且离心力可以忽略, 未考虑温度等其他因素

对半球谐振子振动的影响,电驱动信号仅取了一阶精度等,而这些模型简化将会在陀螺实际工作过程中使问题的研究更加方便简洁,具有较大的工程应用价值。在后续系列中我们将深入研究诸如基本假设或者被忽视的因素在陀螺理论和实际生产中所产生的巨大影响。

### 参考文献

- [1] Волновой. твердотельный гироскоп [M]. Наука, 1985: 1-20.
- [2] 代成龙,皮德常,方针,等. 半球谐振陀螺仪寿命的一种长周期预测方法[J]. 宇航学报, 2015, 36(1): 109-116.
- [3] 樊尚春,刘广玉,王振均. 变厚度轴对称壳谐振子振型的进动研究[J]. 仪器仪表学报,1991(4): 421-426.
- [4] Landau L D, Lifschitz E M. Theory of elasticity(2<sup>ed</sup>) [M]. New York: McGraw-Hill,1970.
- [5] Niordson F I. Theory of thin shells [M]. Berlin: Springer Verlag, 1969.
- [6] Chang C O, Hwang J J, Chou C S. Modal procession of a rotating hemispherical shell [J]. International Journal of Solid sand Structures, 1996, 33(9): 2739-2757.
- [7] 王旭,方针,吴文启,等. 基于二维质点振动模型的半球谐振陀螺谐振子进动分析[J]. 中国惯性技术学报, 2011,19(5):621-626.
- [8] Есарцин Н Е. Динамика неидеальной ободочки и управление ее колебаниями//Известия РАН. Механика твердого тела,1993(4): 49-59.
- [9] Юрцн В Е. Устойчивость колебаний волнового твердотельного гироскопа//Известия АН СССР. Механика твердого тела,1993(3): 49-59.