

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2018.05.007

# 基于多项式函数求解的落角约束制导律

马爽, 杨军, 袁博

(西北工业大学 航天学院, 西安 710072)

**摘要:**在攻击坦克、舰艇等特定目标时,需要对导弹的终端落角进行约束,进一步提高战斗部的毁伤效能。针对这一问题,设计了基于多项式函数推导的落角约束制导律。首先在纵向对称平面内建立弹目相对运动学的小扰动线性化模型,利用落角和脱靶量的始端和终端约束条件,推导得到了满足落角约束的制导律的解析表达式。对该制导律进行仿真,仿真结果表明该制导律可以使导弹按照期望落角命中目标。

**关键词:**落角约束; 制导律; 终端约束

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 2095-8110(2018)05-0039-05

## Impact Angle Constraint Guidance Law Proposed by Polynomial Function

MA Shuang, YANG Jun, YUAN Bo

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** When attacking specific targets such as tanks and ships, we need to restrict the terminal angle of the missile to further improve the damage performance of the warhead. To solve this problem, we design a guidance law based on polynomial function. First, a small perturbation linear model of the relative kinematics of the projectile is established in the longitudinal symmetric plane. Then, by using the beginning and ending constraints of the impact angle and the miss distance, the analytic expression of the guidance law is derived. The guidance law is simulated, and the simulation results show that the guidance law can make the missile hit the target with the expected terminal angle.

**Key words:** Impact angle constraint; Guidance law; Terminal constraint

### 0 引言

为了提高导弹攻击机场、指挥中心、现代军舰、潜艇、坦克和大型建筑物等目标的杀伤力,不仅希望导弹能够精确打击目标,同时还希望导弹能够以期望的攻击角度击中目标,从而更大地发挥战斗部的毁伤效能<sup>[1-2]</sup>。此外,侦察(搜索或勘测)无人机(Unmanned Aerial Vehicle, UAV)航路点的飞行路径也考虑了角度约束问题,高超声速飞行器再入制

导也需要考虑落角约束,因此设计满足角度约束的制导律是十分必要的<sup>[3]</sup>。

针对具有落角约束的制导律设计问题, Zhengdong Hu等<sup>[4]</sup>利用最优控制理论结合变结构控制理论,通过神经网络训练得出等速趋近律的系数,得到三维空间下的具有落角约束的导弹最优制导律。Yao Zhao等<sup>[5]</sup>利用有限时间收敛的滑模控制律设计了可全向攻击的满足导弹落角约束的制导律。Chang-Kyung Ryoo等<sup>[6]</sup>利用最优控制理论得

收稿日期: 2018-05-03; 修订日期: 2018-06-15

作者简介: 马爽(1992-), 女, 硕士研究生, 主要从事导弹制导控制方面的研究。E-mail: 1771906188@qq.com

到了带有落角约束的导弹的最优导引律,可较为准确地计算出导弹的剩余飞行时间。张友安等<sup>[7]</sup>利用 Schwarz 不等式得到了控制系统为一阶惯性环节或无惯性环节的带落角约束的任意加权制导律。

本文针对攻击特定目标需要有落角约束的情况,利用落角和脱靶量的始端和终端约束,使用多项式函数推导得到了在纵向平面内满足落角约束的制导律的解析表达式。通过选取合适的制导律系数,可以使得导弹的法向过载在攻击目标的过程中逐渐趋向于 0,这是利用最优控制理论求得的具有落角约束的制导律不能达到的。

## 1 弹目相对运动学模型

考虑典型条件为载机发射空对地导弹攻击敌方静止目标,为最大限度地发挥导弹的毁伤效能,采用带有落角约束的制导律攻击该目标。针对该典型条件建立理想情况下的弹目相对运动关系,将导弹和目标均视为纵向对称平面内的质点,忽略周围复杂环境的干扰,如图 1 所示,导弹在点  $M$  处,目标在点  $T$  处,参考线为水平面上的基准线。 $V_m$  为导弹速度,  $\theta$  为弹道倾角,  $\theta_m$  为目标的速度方向角,  $a_m$  为导弹的加速度,弹目相对距离为  $r$ ,弹目视线角为  $q$ 。假定导弹匀速运动,目标静止,导弹运动的加速度垂直于其速度方向,不改变速度大小,只改变速度方向<sup>[8-9]</sup>,  $t_0$  为初始时刻,  $t_f$  为终端时刻,则弹目相对运动学方程可表示为:

$$\begin{cases} \dot{r} = -V_m \cos \theta_m \\ r\dot{q} = -V_m \sin \theta_m \\ \dot{\theta} = a_m / V_m \\ \theta_m = \theta - q \end{cases} \quad (1)$$

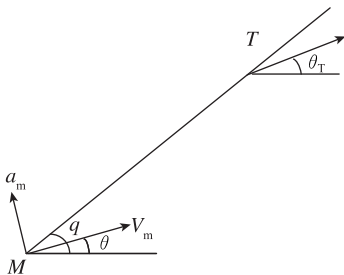


图 1 弹目相对运动学

Fig. 1 Relative kinematics between missile and target

设计具有落角约束的导弹制导律,其目的是要设计合适的制导律使得导弹能够在飞行末端以期

望的落角和尽可能小的脱靶量命中目标,需要满足如下的始端和终端条件:

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \\ y(t_0) = y_0, y(t_f) = y_f \\ \theta(t_0) = \theta_0, \theta(t_f) = \theta_f \end{cases} \quad (2)$$

当导弹的弹道倾角  $\theta$  不大时,将自变量设为  $x$ ,对式(1)进行小扰动线性化处理,可以得到非常简洁的弹目相对运动学方程,处理后结果如下

$$\begin{pmatrix} y' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} a_B \quad (3)$$

其中,  $x$  为导弹的横向位移,  $y$  为导弹的纵向位移,  $f'$  代表  $f$  对  $x$  的导数。

通过将自变量转变为  $x$ ,可以将原本未知的自变量命中时间  $t_f$  转化为已知的自变量即命中位置  $x_T$ ,即目标的位置  $x_T$ ,故可用  $y$  表示导弹的脱靶量,方便利用终端约束条件对其进行求解。

定义制导指令  $a_B = a_m / V_m^2$ 。线性方程初始和终端条件为:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, y(x_f) = y_f \\ \theta(x_0) = \theta_0, \theta(x_f) = \theta_f \end{cases} \quad (4)$$

带落角约束的导弹制导律不仅要求导弹在终端时刻的脱靶量尽可能地小以保证击中目标,同时也要求导弹在终端时刻的落角为期望落角。要使导弹以预计的落角击中  $(x_f, y_f)$  处的目标,可将导弹的制导指令设为如下的多项式形式<sup>[10]</sup>

$$a_B(x) = c_1 x_{go}^n + c_2 x_{go}^{n-1} \quad (5)$$

式中,  $x_{go} = x_f - x$ ,  $n$  为正实数且  $n \geq 1$ ,  $c_1, c_2$  为待求制导律参数。

式(5)中用含 2 个待定参数的多项式函数的形式表示时间可控的导引指令,设计参数  $c_1$  保证导弹能够击中目标,即脱靶量为 0。由式(3)可得,在小扰动线性化的假设前提下,导弹的弹道倾角  $\theta$  可近似为导弹的纵向位移  $y$  关于导弹的水平位移  $x$  的一阶导数。因此,将制导指令中的落角约束项设为比脱靶量约束项的阶数低一阶是合理的。故设计参数  $c_2$  可以保证导弹能够按预计落角击中目标,满足角度约束。求解出  $c_1$  和  $c_2$  的解析解,则可用式(5)表示落角约束的制导指令。

## 2 带有落角约束的制导律

为了保证设计的制导律能够在落角约束的条件下命中目标,首先要确定制导指令式(5)中的参数  $c_2$ ,进而求得  $c_1$ ,最终得到制导指令。

将式(3)写成积分形式同时引入初始条件,可得:

$$\begin{cases} \theta(x) - \theta_0 = \int_{x_0}^x a_B(x) dx \\ y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x \theta(x) dx \end{cases} \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)中,化简后:

$$\begin{cases} \theta_m(x) = -\frac{c_1}{n+1}x_{go}^{n+1} - \frac{c_2}{n}x_{go}^n + c_x \\ y(x) = \frac{c_1}{(n+2)(n+1)}x_{go}^{n+2} + \frac{c_2}{(n+1)n}x_{go}^{n+1} + c_y \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $c_x, c_y$  为与初始条件相关的常值,分别为:

$$\begin{cases} c_x = \frac{c_1}{n+1}\hat{x}_{go}^{n+1} + \frac{c_2}{n}\hat{x}_{go}^n + \theta_0 \\ c_y = -\frac{c_1}{(n+2)(n+1)}\hat{x}_{go}^{n+2} - \frac{c_2}{(n+1)n}\hat{x}_{go}^{n+1} + c_x(x-x_0) + y_0 \\ \hat{x}_{go} = x_f - x_0 \end{cases} \quad (8)$$

将始端条件和终端条件式(4)代入式(7),有:

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{go} = \frac{c_1}{n+1}\hat{x}_{go}^{n+1} + \frac{c_2}{n}\hat{x}_{go}^n \\ \hat{y}_{go} = \frac{c_1}{(n+2)}\hat{x}_{go}^{n+2} + \frac{c_2}{(n+1)}\hat{x}_{go}^{n+1} + \theta_0\hat{x}_{go} \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $\hat{\theta}_{go} = \theta_f - \theta_0, \hat{y}_{go} = y_f - y_0$ 。

令  $A = (\hat{y}_{go} - \theta_0\hat{x}_{go})/\hat{x}_{go}^{n+1}, B = \hat{\theta}_{go}/\hat{x}_{go}^n$ , 则式(9)可改写为:

$$\begin{cases} (n+2)A = c_1\hat{x}_{go} + \frac{n+2}{n+1}c_2 \\ (n+1)B = c_1\hat{x}_{go} + \frac{n+1}{n}c_2 \end{cases} \quad (10)$$

求解式(10),可得:

$$\begin{cases} c_1 = (n+2)(n+1)[(n+1)A - nB]/\hat{x}_{go} \\ c_2 = (n+1)n[(n+1)B - (n+2)A] \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)代入式(6),得

$$a_B(x_0) = (n+1) \left[ (n+2) \frac{\hat{y}_{go} - \theta_0\hat{x}_{go}}{\hat{x}_{go}^2} - n \frac{\hat{\theta}_{go}}{\hat{x}_{go}} \right] \quad (12)$$

式(12)利用始端和终端约束求得了导弹在初始点处的加速度指令,则对于任意横向位移  $x$ , 制导指令可写为

$$a_B(x) = (n+1) \left[ a_{pn}(x) - n \frac{\theta_{go}}{x_{go}} \right] \quad (13)$$

其中,

$$a_{pn}(x) = (n+2) \frac{y_{go} - \theta x_{go}}{x_{go}^2} \quad (14)$$

可以看出,  $a_{pn}$  是经典比例导引律的线性近似。

当  $n=1$  时,式(13)与利用最优控制理论求得的具有落角约束的导弹制导律的形式相同,此时比例导引律的系数为 3。如果用经典比例导引律代替  $a_{pn}$ , 并将制导指令  $a_B$  转换为以时间为自变量的形式,则式(13)可以写成如下形式

$$a_B(t) = (n+1) \left[ (n+2)V_m \dot{q} - nV_m \frac{\theta_{go}}{t_{go}} \right] \quad (15)$$

式中,  $t_{go} = t_f - t$  代表导弹的剩余飞行时间。

可以看出,式(15)中含有导弹的剩余飞行时间  $t_{go}$ , 将导弹的剩余飞行时间用式(16)近似

$$t_{go} = \frac{r}{V_m} \quad (16)$$

所以,式(15)可以表示为如下形式

$$a_B(t) = (n+1) \left[ (n+2)V_m \dot{q} - nV_m^2 \frac{\theta_{go}}{r} \right] \quad (17)$$

式(17)即为本文求得的基于多项式函数推导得出的落角约束制导律。可以看出,当时,式(17)退化为比例系数为 2 的比例导引律。

### 3 仿真结果与分析

在本文的假设前提下,在不同期望落角及不同制导律系数的情况下对文中求得的带落角约束的导弹制导律进行仿真分析。

假设载机发射空对地导弹攻击敌方静止目标,载机发射导弹时导弹位于(0m, 10000m)处,导弹最大可用过载为 50g,其初速度为  $V_0 = 240\text{m/s}$ ,初始弹道倾角为  $\theta_0 = 0^\circ$ ;目标静止于(10000m, 0m)处,导弹的自动驾驶仪简化为一阶惯性环节,时间常数为 0.45。

1)设置期望落角为  $\theta_f = -30^\circ$ , 利用本文所设计的制导律,分别令  $n=1, 2, 3$ , 得到仿真结果如图 2~图 4 所示。

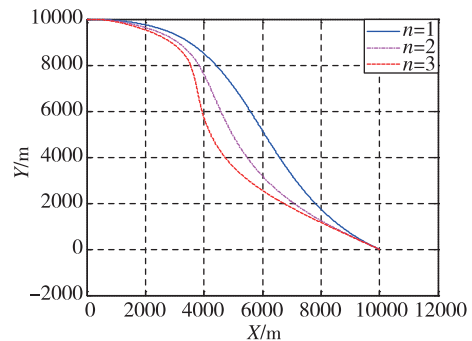


图 2 不同系数下的弹道曲线

Fig. 2 Ballistic curve of different coefficient

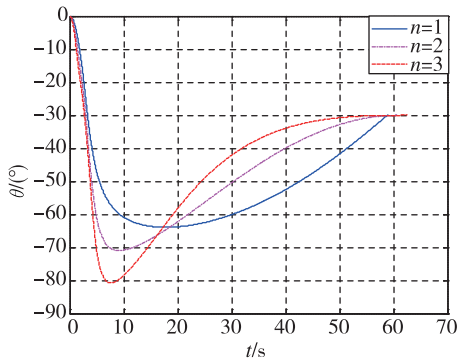


图3 不同系数下的弹道倾角曲线

Fig. 3 Trajectory inclination angle curves with different coefficients

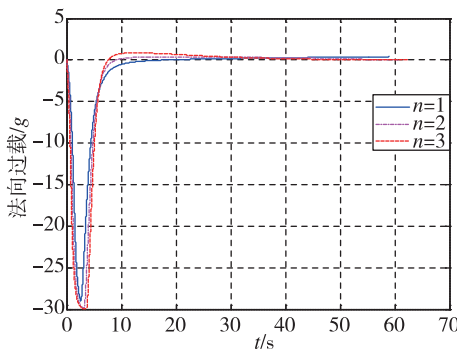


图4 不同系数下的过载曲线

Fig. 4 Overload curves with different coefficients

当制导律系数分别取为  $n=1, 2, 3$  时, 导弹的脱靶量分别为  $0.0557\text{m}$ 、 $0.0689\text{m}$ 、 $0.0162\text{m}$ , 能够保证精确命中目标。

由图2可以看出, 当系数  $n$  取不同的值时, 导弹都能按照预定的角度击中目标。当  $n$  越小时, 导弹的弹道曲线越平滑。

由图3可以看出, 当系数  $n$  取不同的值时, 导弹最终都能以期望的落角击中目标, 当  $n$  越大时, 导弹的弹道倾角越快地趋向于期望落角, 但其初始时刻偏离期望落角的程度越大。

特别地, 由图3和图4可以看出, 当系数  $n > 1$  时, 导弹的过载最终可以收敛到0, 当  $n=1$  时导弹的过载不能收敛至0。通过设置合适的目标函数并应用施瓦茨不等式求解, 可以得到初始位置误差、初始方向误差和落角约束作用下的无量纲加速度指令, 指令的解析形式表明, 只有当系数  $n > 1$  时, 加速度指令在弹道末端才会趋近于0<sup>[11]</sup>。

2) 令制导律系数  $n=2$ , 设置导弹的期望落角  $\theta_f$  分别为  $-45^\circ$ 、 $-60^\circ$ 、 $-90^\circ$ , 对本文所设计的制导律进行仿真, 仿真结果如图5~图7所示。

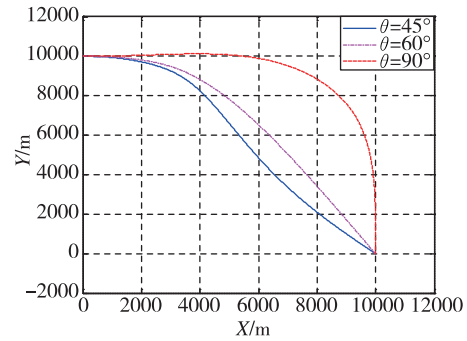


图5 不同期望落角下的弹道曲线

Fig. 5 Ballistic curves with different expected impact angle

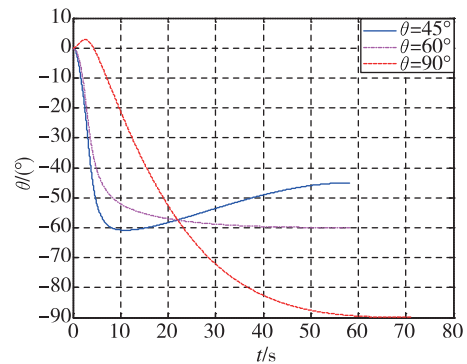


图6 不同期望落角下的弹道倾角曲线

Fig. 6 Trajectory inclination angle curves with different expected impact angle

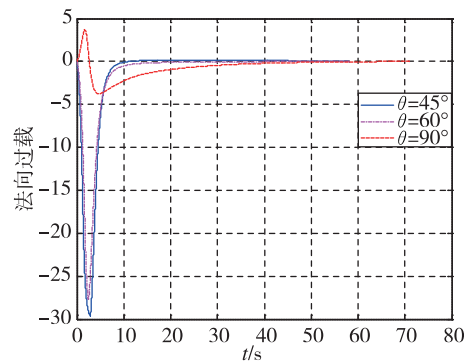


图7 不同期望落角下的过载曲线

Fig. 7 Overload curves with different expected impact angle

期望落角  $\theta_f$  分别为  $-45^\circ$ 、 $-60^\circ$ 、 $-90^\circ$  时, 导弹的脱靶量分别为  $0.0919\text{m}$ 、 $0.0815\text{m}$ 、 $0.138\text{m}$ , 能够精确地命中目标。

由图5和图6可以看出, 当导弹的期望落角  $\theta_f$  取不同的值时, 本文设计的制导律能够使导弹按照预定角度命中目标。

由图6可以看出, 当期望落角  $\theta_f$  大于初始弹目视线角时, 导弹的弹道倾角是单调递增的; 不同期

望落角  $\theta_i$  使得导弹命中目标的时间不同。

由图7可以看出,当导弹的期望落角  $\theta_i$  不同时,导弹的初始法向过载差异较大,但最终都能收敛到0。

因此,本文设计的制导律不仅能够使导弹按照期望角度命中目标,同时当制导律系数  $n > 1$  时,还可使导弹的法向过载逐渐趋向于0,这是利用最优控制理论求得的具有落角约束的制导律不能达到的。

#### 4 结论

本文通过建立纵向对称平面内弹目相对运动学模型,在小扰动线性化假设的前提下,利用落角和脱靶量的始端和终端约束,推导得到满足落角约束的导弹制导律,该制导律是由经典比例导引律以及关于落角的修正项组合而成。仿真结果表明,将导弹的自动驾驶仪简化为一阶惯性环节时,在不同的仿真条件下,该制导律都能按照期望落角击中目标。当制导律系数  $n > 1$  时,可以使得导弹的法向过载最终趋向于0。

#### 参考文献

- [1] 王健,崔文昊,史震,等. 攻击角度约束下打击机动目标的制导律[J]. 导航定位与授时, 2016, 3(5): 51-55.
- [2] 周鲁,宋建梅,黄岚. 带落角约束的圆弧比例导引律和偏置比例导引律的研究[J]. 导航定位与授时, 2014, 1(3): 11-17.
- [3] 张宽桥,杨锁昌,王刚. 带落角约束的有限时间收敛末制导律研究[J]. 弹道学报, 2015, 27(4): 30-36.
- [4] Hu Z, Tang X, Wang Y. A 3-dimensional robust guidance law with impact angle constraint[C]// 2011 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). IEEE, 2011: 999-1006.
- [5] Zhao Y, Sheng Y, Liu X. Impact angle constrained guidance for all-aspect interception with function-based finite-time sliding mode control[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(3): 1791-1804.
- [6] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(3): 483-492.
- [7] 张友安,黄诒,孙阳平. 带有落角约束的一般加权最优制导律[J]. 航空学报, 2014, 35(3): 848-856.
- [8] Kumar S R, Rao S, Ghose D. Sliding-mode guidance and control for all-aspect interceptors with terminal angle constraints[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2012, 35(4): 1230-1246.
- [9] Kim K S, Kim Y. Design of generalized conceptual guidance law using aim angle[J]. Control Engineering Practice, 2004, 12(3): 291-298.
- [10] 杨哲,林德福,王辉. 带视场角限制的攻击时间控制制导律[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(9): 2122-2128.
- [11] 林德福,王辉,王江,等. 战术导弹自动驾驶仪设计与制导律分析[M]. 北京:北京理工大学出版社,2012.