

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2019.02.005

一种圆锥运动条件下的等效旋转矢量算法研究

王文举,刘生攀

(贵州航天控制技术有限公司,贵阳 550009)

摘要:传统旋转矢量姿态算法一般采用陀螺的角增量信号来构造积分算法,当应用于输出为角速率的光纤陀螺捷联系统时,通过角速率提取角增量,算法会损失一定精度。提出了一种以陀螺角速率信号与角增量信号同时作为输入的改进旋转矢量姿态算法,进一步补偿了圆锥误差,提高了计算精度。仿真结果表明,该算法与传统二子样算法相比较,计算量相当,姿态精度、速度精度、位置精度有大幅度的提升。

关键词:圆锥运动;姿态算法;等效旋转矢量

中图分类号:U666.1

文献标志码:A

文章编号:2095-8110(2019)02-0034-05

Research on an Equivalent Rotation Vector Algorithm Under Coning Motion Environment

WANG Wen-ju, LIU Sheng-pan

(Guizhou Aerospace Control Technology Co., Ltd., Guiyang 550009, China)

Abstract: As the incremental angular signals of gyroscope is often used in classical rotation vector attitude algorithms to design the integration algorithm, in FOG Strap-down system which outputs angular rate signals to extract incremental angular signals using angular rate signals would lead to the loss of accuracy. In this paper, the improved rotation vector attitude algorithms are developed using both angular rate and incremental angular signals, and the coning error compensation accuracy is further improved. The simulation results show that compared with the traditional two-sample algorithm, the proposed algorithm has an equivalent amount of computation and great improvement in attitude accuracy, velocity accuracy and location accuracy.

Key words: Coning motion; Attitude algorithm; Equivalent rotation vector

0 引言

在捷联惯导系统的姿态、速度和位置更新算法中,姿态算法对整个系统精度的影响最大,它是算法研究和设计的核心。姿态算法有欧拉角法、方向余弦法、四元数法、旋转矢量法等^[1-2]。欧拉角算法包含三角运算,实时计算有一定的困难,且在一定条件下方程出现退化,不适用全姿态的解算。方向

余弦法避免了欧拉角法中的方程退化问题,但计算量大,工程中并不实用。四元数法计算量小,实现简单,工程中较实用,其本质是旋转矢量法中的单子样算法,没有对有限转动过程中的不可交换误差进行补偿,比较适合低动态载体的姿态解算,对于高动态载体,算法漂移会比较严重。旋转矢量法采用多子样算法对不可交换误差进行补偿,算法实现简单,并且可以对系数进行优化,适用于角运动频

收稿日期:2018-07-30;修订日期:2018-08-22

作者简介:王文举(1978-),男,博士,高级工程师,主要从事捷联惯性导航方面的研究。E-mail: upcwangwenju@126.com

繁或角振动的载体姿态解算。

为了解决角运动过程中的不可交换误差,1971年 Bortz 提出了旋转矢量法,它有 2 个计算步骤,先求解旋转矢量,再进行四元数更新。目前的旋转矢量多以角增量为参数进行求解,根据姿态更新周期内对陀螺输出角增量等间隔采样数的不同,等效旋转矢量的求解可分为单子样法、双子样法、三子样法和四子样法等^[3-9]。

对于给定的捷联姿态算法,需要采用一定的测试输入来评价其性能。对于捷联惯导姿态更新,经典圆锥运动是最恶劣的工作环境条件之一,它会诱发数学平台的严重漂移,所以对旋转矢量算法作优化处理。通常采用经典圆锥运动作为环境条件,如果能确保圆锥运动环境条件下算法精度高,就能确保在其余环境条件下算法精度高^[10-11]。

本文首先介绍了经典圆锥运动,常用的等效旋转矢量法,然后详细推导了一种新的等效旋转矢量法,并且以经典圆锥运动作为姿态算法的测试输入。仿真结果表明,姿态、速度、位置精度得到了明显提高。

1 经典的圆锥运动

经典圆锥运动下载体运动可以用旋转矢量表示为^[12]:

$$\Phi = [0 \quad \phi \cos(\Omega t) \quad \phi \sin(\Omega t)]^T \quad (1)$$

其中, ϕ 是圆锥运动的锥半角, Ω 是圆锥运动的角频率。任意 t 时刻,载体坐标系 Oy_bz_b 平面上的转轴 Φ 相对于惯性坐标系转动 ϕ 角度,转轴时刻在变化而转角恒定不变,载体坐标系的 x_b 轴在空间画出一个圆锥面(半锥角为 ϕ , x_b 轴为锥轴),如图 1 所示,这正是该角运动称为圆锥运动的原因。

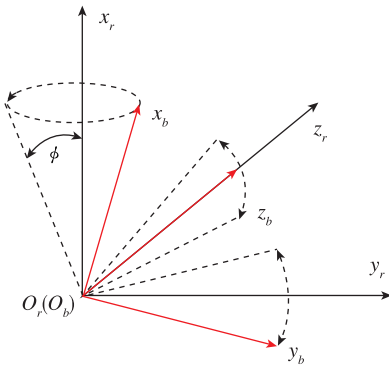


图 1 圆锥运动

Fig. 1 Coning motion

经典圆锥运动时,载体相对惯性空间的角速率在载体坐标系的分量为:

$$\omega = \begin{bmatrix} -2\Omega \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ -\Omega \sin(\phi) \sin(\Omega t) \\ \Omega \sin(\phi) \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

经典圆锥运动对应的载体更新四元数为:

$$q(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\Omega t) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

2 等效旋转矢量算法

等效旋转矢量法也是建立在刚体矢量旋转思想的基础上,与四元数法不同在于:在姿态更新周期内,四元数法直接计算姿态四元数,而旋转矢量法先计算姿态变换四元数,再计算姿态四元数。旋转矢量的微分方程如下:

$$\dot{\Phi} = \omega + \frac{1}{2}\Phi \times \omega + \frac{1}{12}\Phi \times (\Phi \times \omega) \quad (4)$$

式中,旋转矢量的导数等于 ω 再加上 2 个修正项,而修正项反映了不可交换误差产生的影响。目前,旋转矢量算法多以角增量为参数,基于泰勒级数展开进行多子样求解,如单子样法、双子样法、三子样法、四子样法等。双子样算法公式如下:

$$\Phi = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \frac{2}{3}\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_2 \quad (5)$$

三子样算法公式如下:

$$\Phi = (\Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3) + \frac{33}{80}\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_3 + \frac{57}{80}(\Delta\theta_1 \times \Delta\theta_2 + \Delta\theta_2 \times \Delta\theta_3) \quad (6)$$

高阶泰勒级数展开原则上要求函数 Φ 足够光滑,而实际陀螺输出总会或多或少包含电气噪声,噪声并不反映载体的真实角运动,同时对角速度函数的光滑性也造成不良影响。因此,多子样算法的精度有限,并非子样数越多算法的实用精度就越高,并且高子样的计算量较大。在选择子样数时,应权衡利弊,兼顾精度要求、计算速度等方面。

3 一种新的等效旋转矢量算法

旋转矢量算法多以角增量为参数进行求解,激

光陀螺一般输出为角增量,但是光纤陀螺输出为角速率^[13]。如果把角速率转化为角增量,很难保证旋转矢量精度不受影响,这一差异使得使用角增量代替旋转矢量进行姿态更新时会产生误差,并且误差随时间会不断累积。本节在旋转矢量算法的基础上研究了一种新的等效旋转矢量算法,该算法使用角增量和角速率,以角速率为主,等效旋转矢量精度更高,与二子样算法相比较,圆锥误差补偿精度得到进一步提高。

类似于传统二子样算法的推导思路,陀螺在一个计算周期($T, T+h$)内,需要3次陀螺采样值,假设 h 内输出可表示为:

$$\omega(\tau) = a + 2b\tau + 3c\tau^2 \quad 0 \leq \tau \leq h \quad (7)$$

记角增量为:

$$\Delta\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad (8)$$

可计算 $\Delta\theta(0)$ 及其各阶导数,如下:

$$\begin{cases} \Delta\theta(0) = 0 \\ \dot{\Delta\theta}(0) = a \\ \ddot{\Delta\theta}(0) = 2b \\ \dots \\ \Delta\theta(0) = 6c \\ \dots \\ \Delta\theta^{(i)}(0) = 0 \quad i = 4, 5, 6, \dots \end{cases} \quad (9)$$

由于姿态更新周期 h 一般为毫秒级,旋转矢量 Φ 也可视为小量^[14]。

$$\Phi(\tau) \approx \Delta\theta(\tau) \quad (10)$$

忽略高阶小量,式(4)可以写成:

$$\dot{\Phi}(\tau) = \omega(\tau) + \frac{1}{2}\Delta\theta(\tau) \times \omega(\tau) \quad (11)$$

可计算 $\Phi(0)$ 的各阶导数,如下:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(0) = a \\ \ddot{\Phi}(0) = 2b \\ \dots \\ \Phi(0) = 6c + a \times b \\ \dots \\ \dot{\Phi}(0) = 6a \times c \\ \dots \\ \Phi(0) = 12b \times c \\ \dots \\ \Phi^{(i)}(0) = 0 \quad i = 6, 7, 8, \dots \end{cases} \quad (12)$$

将 $\Phi(h)$ 用泰勒级数展开^[15],得:

$$\begin{aligned} \Phi(h) = & \Phi(0) + h\dot{\Phi}(0) + \frac{h^2}{2}\ddot{\Phi}(0) + \frac{h^3}{6}\ddot{\Phi}(0) + \\ & \frac{h^4}{24}\ddot{\Phi}(0) + \frac{h^5}{120}\ddot{\Phi}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & ah + bh^2 + ch^3 + \frac{1}{6}a \times bh^3 + \\ & \frac{1}{4}a \times ch^4 + \frac{1}{10}b \times ch^5 \end{aligned} \quad (13)$$

设光纤陀螺在每个周期内, $t=0, t=\frac{h}{2}, t=h$ 的角速率分别为: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$,可以用陀螺角速率估计 a, b, c 的大小,如下:

$$\begin{cases} a = \omega_1 \\ b = \frac{1}{2h}(-3\omega_1 + 4\omega_2 - \omega_3) \\ c = \frac{2}{3h^2}(\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3) \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13),其中:

$$ah + bh^2 + ch^3 = \frac{h}{6}(\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3)$$

$$a \times b = \frac{1}{2h}(4\omega_1 \times \omega_2 - \omega_1 \times \omega_3)$$

$$a \times c = \frac{2}{3h^2}(-2\omega_1 \times \omega_2 + \omega_1 \times \omega_3)$$

$$b \times c = \frac{2}{3h^3}(\omega_1 \times \omega_2 - \omega_1 \times \omega_3 + \omega_2 \times \omega_3)$$

可知:

$$\begin{aligned} \Phi(h) = & \frac{h}{6}(\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3) + \\ & \frac{h^2}{12}(4\omega_1 \times \omega_2 - \omega_1 \times \omega_3) + \\ & \frac{h^2}{6}(-2\omega_1 \times \omega_2 + \omega_1 \times \omega_3) + \\ & \frac{h^2}{15}(\omega_1 \times \omega_2 - \omega_1 \times \omega_3 + \omega_2 \times \omega_3) \end{aligned} \quad (15)$$

并考虑陀螺的角增量输出,则旋转矢量可用式(16)估计:

$$\Phi = \Delta\theta + Xh^2\omega_1 \times \omega_3 + Yh^2\omega_2 \times (\omega_3 - \omega_1) \quad (16)$$

式中:

$$\Delta\theta = \frac{h}{6}(\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3)$$

$$X = \frac{1}{60}$$

$$Y = \frac{1}{15}$$

在圆锥运动条件下,捷联惯导姿态更新过程会诱发数学平台的严重漂移。因此,以圆锥运动作为测试条件,对旋转矢量算法中的系数作优化,根据圆锥运动可得到理论四元数 $q(h)$,利用旋转矢量

$\Phi(h)$ 得到计算四元数 $\hat{q}(h)$, 两者的差值得误差四元数 $\tilde{q}(h)$ 。将误差表达式进行泰勒级数展开, 通过选择最优化系数, 使得误差项为 $0^{[15]}$, 从而得出: $X = 1/180, Y = 7/90$, 则有:

$$\Phi = \frac{h}{6}(\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3) + \frac{1}{180}h^2\omega_1 \times \omega_3 + \frac{7}{90}h^2\omega_2 \times (\omega_3 - \omega_1) \quad (17)$$

4 仿真分析

捷联惯导加表零偏稳定性在 $100\mu g$, 陀螺零漂稳定性在 $0.01(^{\circ})/h$, 惯性器件采样周期为 $5ms$, 姿态更新周期 $10ms$ 。以经典圆锥运动作为姿态输入, 锥半角为 1° , 角频率为 $8Hz$, 导航时间为 $1h$ 。对比双子样法与新的等效旋转矢量法的解算效果, 如图 2~图 7 所示, 在姿态精度、速度精度、位置精度等方面, 新的算法都优于传统的双子样算法, 并且计算量相当。

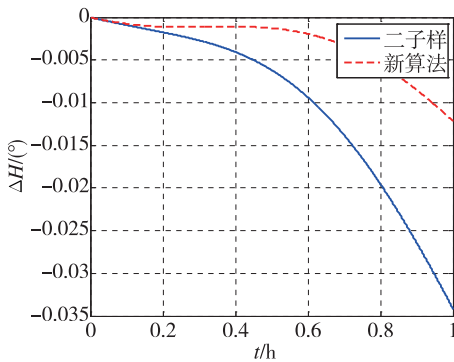


图 2 航向角误差对比图

Fig. 2 Contrast diagram of heading error

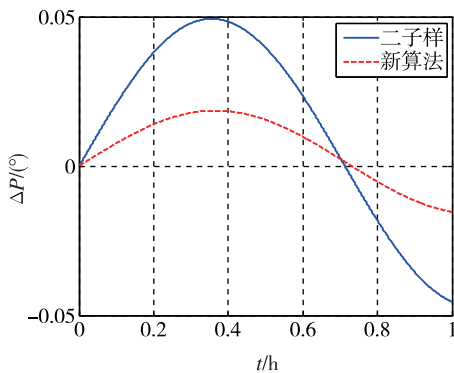


图 3 俯仰角误差对比图

Fig. 3 Contrast diagram of pitch error

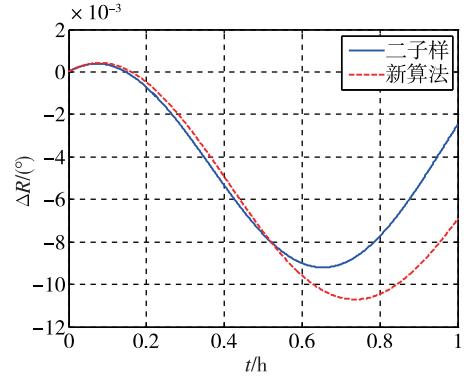


图 4 横滚角误差对比图

Fig. 4 Contrast diagram of roll error

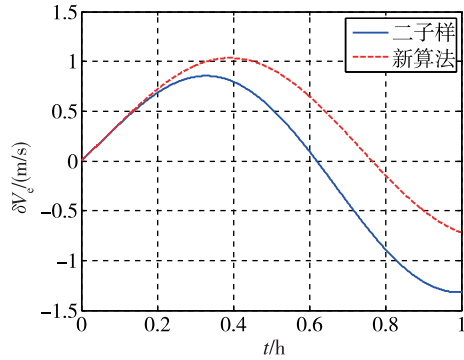


图 5 东向速度误差对比图

Fig. 5 Contrast diagram of east direction velocity error

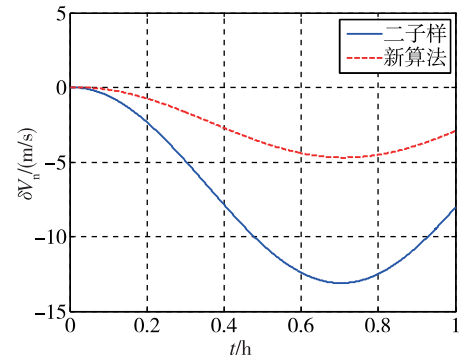


图 6 北向速度误差对比图

Fig. 6 Contrast diagram of north direction velocity error

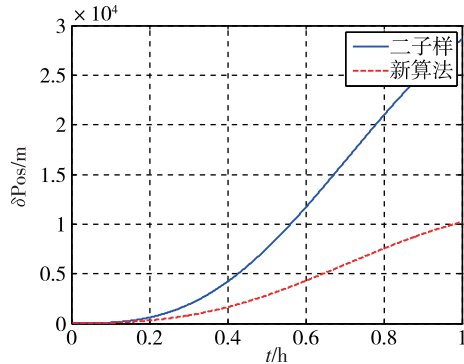


图 7 位置误差对比图

Fig. 7 Contrast diagram of position error

5 结论

本文根据光纤陀螺输出为角速率的特点,在旋转矢量姿态更新算法的基础上研究了一种新的圆锥误差补偿表达式。等效旋转矢量使用角增量和角速率,以角速率为主,其精度高于二子样算法,运算量相当,通过仿真验证了改进算法具有较高的精度,且计算量相对较小,易于工程实现,为光纤陀螺捷联系统姿态算法解算提供了一个更为有效的途径。

参考文献

- [1] 何虔恩,曾聪杰,林志贤,等.长航时高精度惯导系统姿态阵的四种解算方法[J].导航定位与授时,2018,5(2):35-43.
He Qianen, Zeng Congjie, Lin Zhixian, et al. Four calculating methods of the attitude matrix for long-endurance and high-accuracy inertial navigation systems [J]. Navigation Positioning and Timing, 2018, 5 (2): 35-43(in Chinese).
- [2] 崔海英,郭建军,石秀华,等.基于旋转矢量的捷联惯性系统姿态算法研究[J].声学技术,2011,30(4):70-73.
Cui Haiying, Guo Jianjun, Shi Xiuhua, et al. Research on attitude algorithm of strapdown inertial system based on rotation vector[J]. Technical Acoustics, 2011, 30 (4): 70-73(in Chinese).
- [3] 张泽,段广仁.捷联惯导四子样旋转矢量姿态更新算法[J].控制工程,2010,17(3):272-274.
Zhang Ze, Duan Guangren. On four-sample rotation vector algorithm for SINS attitude updating[J]. Control Engineering of China, 2010, 17(3): 272-274(in Chinese).
- [4] 王国臣,齐昭,张卓.水下组合导航系统[M].北京:国防工业出版社,2016.
Wang Guochen, Qi Zhao, Zhang Zhuo. Underwater integrated navigation system[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2016(in Chinese).
- [5] Bortz J E. A new mathematical formulation for strap-down inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971 (1): 61-66.
- [6] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287-291.
- [7] Lee J G, Mark J G, Tazartes D A, et al. Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(4): 738-743.
- [8] Yeon F J, Yu P L. Improved strap-down coning algorithms[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(2): 484-489.
- [9] Musoff H, Murphy J H. Study of strapdown navigation attitude algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1995, 18(2): 287-290.
- [10] 屈熠,赵忠.增强型等效旋转矢量算法在圆锥运动下的仿真[J].计算机仿真,2010,27(11):25-29.
Qu Yi, Zhao Zhong. Simulation of improved rotation vector algorithm in coning motion [J]. Computer Simulation, 2010, 27(11): 25-29(in Chinese).
- [11] 张响申,曹彪.基于改进等效旋转矢量的姿态更新算法研究[J].舰船电子工程,2017,37(9):30-32.
Zhang Yunshen, Cao Biao. Strapdown algorithm re-search based on improved equivalent rotation vector [J]. Ship Electronic Engineering, 2017,37(9): 30-32 (in Chinese).
- [12] 魏小莹,付振亮,邓正隆.捷联惯导姿态算法的测试输入研究[J].中国惯性技术学报,2006,14(1):1-6.
Wei Xiaoying, Fu Zhenxian, Deng Zhenglong. Research on test inputs for attitude algorithms of SINS [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2006,14 (1): 1-6(in Chinese).
- [13] 吴衍记.高精度光纤陀螺发展现状及对策[J].导航定位与授时,2015,2(4):53-57.
Wu Yanji. The current situation and countermeasures of high precision fiber optic gyro[J]. Navigation Positioning and Timing, 2015, 2(4): 53-57(in Chinese).
- [14] 秦永元.惯性导航(第二版)[M].北京:科学出版社,2014.
Qin Yongyuan. Inertial navigation(2nd Edition)[M]. Beijing: Science Press, 2014(in Chinese).
- [15] 胡杰.用于鱼雷的光纤陀螺罗经系统算法研究[D].南京:东南大学,2013.
Hu Jie. Fiber optic gyro compass system algorithm for torpedo[D]. Nanjing: Southeast University, 2013 (in Chinese).