

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2019.06.004

## 半球陀螺谐振子环向振型进动特性研究

宋丽君<sup>1</sup>, 周 蕾<sup>1</sup>, 李绍良<sup>2</sup>, 付强文<sup>3</sup>

- (1. 西安建筑科技大学信息与控制工程学院, 西安 710055;
2. 上海航天控制技术研究所, 上海 201109;
3. 西北工业大学自动化学院, 西安 710072)

**摘要:** 基于半球谐振子的实际加工结构特征, 为降低维持半球谐振陀螺振动所需的能量损耗, 建立半球谐振陀螺能量型谐振子数学模型, 并研究半球谐振子绕中心轴旋转时环向振型的变化规律; 通过分析半球谐振子顶端角、底端角和壁厚的非理想性对进动因子的影响, 确定半球壳体旋转时应选取的最佳振型与进动因子。采用 ANSYS 软件构建一系列模型, 验证有关理论研究结果。通过计算仿真分析可知, 半球谐振子进动因子对顶端角变化的敏感性远大于对底端角变化的敏感性, 且顶端角变化引起的角速度误差远大于相同底端角变化引起的角速度误差, 为半球谐振陀螺的谐振子加工研制提供了理论依据。

**关键词:** 半球谐振陀螺仪; 能量型谐振子数学模型; 环向振型; 谐振频率; 进动因子

中图分类号: U666.1

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 2095-8110(2019)06-0019-08



## Research on the Circumferential Precession Characteristics of Resonator of HRG

SONG Li-jun<sup>1</sup>, ZHOU Lei<sup>1</sup>, LI Shao-liang<sup>2</sup>, FU Qiang-wen<sup>3</sup>

- (1. Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China;
2. Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109, China;
3. North-Western Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** Based on the actual processing structure characteristics of hemispherical resonator, and to reduce the loss of the energy needed for maintaining hemispheric gyro vibration, the mathematical model of energy type resonator is established to investigate the changing rule of the circumference vibrating when the hemispherical resonator is rotating about the central axis. In the paper, the influence on precession factor brought by the top angle, the bottom angle and wall unevenness of hemispherical resonator is analyzed, and the best vibrating mode and precession factor, when the hemispherical shell rotates, are selected. A series of hemispherical resonator models are established with the software ANSYS to prove the results of theoretical research. The simulation results show that precession factor of hemispherical resonator is more sensitive to the change of the top angle than to that of the bottom angle, and the error of angular velocity caused by the change of the top angle is much larger than that caused by the change of the bottom angle.

收稿日期: 2019-09-26; 修订日期: 2019-11-04

基金项目: 国家重点研发计划项目(2017YFC0704200)

作者简介: 宋丽君(1978-), 女, 副教授, 博士后, 主要从事惯性导航及组合导航算法研究。

E-mail: songlijun9071@sina.com

**Key words:** HRG; Mathematical model of energy type resonator; Vibrating of circumference; Resonant frequency; Precession factor

## 0 引言

半球谐振陀螺(Hemispherical Resonator Gyro, HRG)是一种具有高精度、高可靠性、抗冲击、不需预热、启动时间短、寿命长等突出优点的新型陀螺,是利用球壳径向振动产生的驻波沿环向进动敏感基座旋转的振动陀螺,其以可扩展空间惯性参考系统(Scalable Space Inertial Reference Unit, SSIRU)为基础,在高精度惯性传感器领域具有广阔的应用前景<sup>[1-3]</sup>。

HRG主要敏感部件是具有超低阻尼的半球谐振子,也正是因为半球谐振子的优越性能,HRG广泛应用于海陆空天电等技术领域。本文围绕半球谐振子成型工艺、性能指标和最终用户要求,对半球陀螺谐振子环向振型进动特性进行分析,建立半球陀螺能量型谐振子数学模型,确定半球壳体旋转时应选取的最佳振型与进动因子,为后续大批量、低成本可行的成型工艺路线提供理论研究基础,以加快HRG的研制及其应用进程。

## 1 半球谐振子运动方程

半球谐振子由薄壁半球壳体与支撑杆两部分构成。薄壁半球壳体使谐振腔材料对弯曲能量储存达到最大值,支撑杆通过钢焊方式固定,起到约束和支撑谐振子的作用,同时还进行电信号的传递。本文在半球谐振子基希霍夫-李雅夫数学模型的基础上,讨论了基于能量守恒原理的能量型半球谐振子数学模型,而且谐振频率和进动因子的具体表达式也是基于能量守恒原理给出。在采用能量型谐振子数学模型分析谐振子振动特性的同时,还分析了谐振子底端角 $\varphi_0$ 、顶端角 $\varphi_F$ 和壁厚 $h(\varphi)$ 的非理想性等因工艺缺陷引起半球谐振子参数对进动因子的影响。

半球谐振子坐标示意图如图1所示<sup>[4-5]</sup>。

图1中, $x$ 轴为谐振子中心轴; $R$ 和 $h(\varphi)$ 分别为谐振子半球壳的中面半径和壁厚; $\varphi_0$ 为谐振子底端角,是谐振子约束端与中心轴的夹角,其大小由谐振子支撑杆半径与半球壳半径比值决定; $\varphi_F$ 为谐

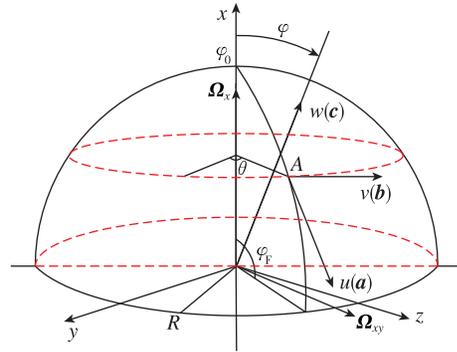


图1 半球谐振子坐标示意图

Fig. 1 The coordinates of hemispherical resonator

振子顶端角,为谐振子自由端与中心轴的夹角,在没有任何约束的情况下, $\varphi_0 = 0^\circ$ , $\varphi_F = 90^\circ$ 。

壳体上A点的位移矢量为

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v + \mathbf{c}w$$

其中, $u$ 、 $v$ 、 $w$ 分别为壳体母线、切线和径向的位移分量, $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 分别为相应的动矢量。

半球谐振子形变和应力受薄壳弹性力学约束,假设当半球谐振子在惯性空间以角速度 $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_x + \boldsymbol{\Omega}_{yz}$ 旋转时,依据参考文献[10],旋转空间的半球谐振子振型可以表示为

$$\begin{cases} u(\varphi, \theta, t) = u(\varphi) \cos n(\theta + \psi) \cos \omega_n t \\ v(\varphi, \theta, t) = v(\varphi) \sin n(\theta + \psi) \cos \omega_n t \\ w(\varphi, \theta, t) = w(\varphi) \cos n(\theta + \psi) \cos \omega_n t \end{cases} \quad (1)$$

$$\psi = \int_{t_0}^t \mathbf{P} dt = K \int_{t_0}^t \boldsymbol{\Omega} dt$$

其中, $u(\varphi)$ 、 $v(\varphi)$ 、 $w(\varphi)$ 分别为沿各向分布的振型, $\psi$ 为振型进动角, $n$ 为环向波数, $\omega_n$ 为谐振频率, $K$ 为进动因子。

由弹性薄壳理论可知,半球谐振子的弹性势能为

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_S \left[ \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\mu \varepsilon_\theta \varepsilon_\varphi + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{\varphi\theta}^2 + \frac{h^2(\varphi)}{12} (\lambda_\theta^2 + \lambda_\varphi^2 + 2\mu \lambda_\theta \lambda_\varphi + \frac{1-\mu}{2} \lambda_{\varphi\theta}^2) \right] h(\varphi) dS \quad (2)$$

式中, $E$ 为弹性模量, $\mu$ 为材料的泊松比。

半球壳中,式(2)中可拉伸半球薄壳的中面应变和中面弯曲变形分别为

$$\begin{cases} \varepsilon_\varphi = \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \right) / R \\ \varepsilon_\theta = \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) / R \sin \varphi \\ \varepsilon_{\varphi\theta} = \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \sin \varphi - v \cos \varphi \right) / R \sin \varphi \\ \lambda_\varphi = \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) / R^2 \\ \lambda_\theta = \left( -\frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \cos \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) / (R^2 \sin \varphi) \\ \lambda_{\varphi\theta} = \left[ \frac{\partial u}{\partial \theta} + \sin \varphi \frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \cos \varphi + 2 \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} \right) \right] / (R^2 \sin \varphi) \end{cases} \quad (3)$$

在实际系统中,半球壳顶端自由,底端受到约束并处于微幅振动状态,因此半球壳体满足中面不扩张理论,即中面法向应变和切向应变为 0,则振型  $u(\varphi)$ 、 $v(\varphi)$ 、 $w(\varphi)$  有如下关系

$$\begin{cases} w(\varphi) = -\frac{du(\varphi)}{d\varphi} \\ nv(\varphi) + u(\varphi) \cos \varphi - \frac{du(\varphi)}{d\varphi} \sin \varphi = 0 \\ nu(\varphi) + v(\varphi) \cos \varphi - \frac{dv(\varphi)}{d\varphi} \sin \varphi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

因底端约束边界条件

$$u(\varphi_0) = v(\varphi_0) = w(\varphi_0) = 0$$

可得

$$\begin{cases} u(\varphi) = v(\varphi) = C_1 \sin \varphi \tan^n \frac{\varphi}{2} \\ w(\varphi) = -C_1 (n + \cos \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $C_1$  为一待定常数,由振动的初始激励条件确定<sup>[6-9]</sup>。

## 2 半球陀螺谐振子的进动特性

### 2.1 HRG 的工作原理

HRG 基于科氏效应原理对输入的角速度或者角度进行测量。当 HRG 不旋转时,波腹点和波节点的位置相对于半球壳是静止状态,对谐振子施加外部激励,使谐振子的能量在不同模态之间转换,形成稳定振形。当 HRG 旋转时,陀螺内稳定振动的谐振子振形会滞后于陀螺本体的物理旋转,其滞后量约为旋转

角度的 30%,其工作原理如图 2 所示。

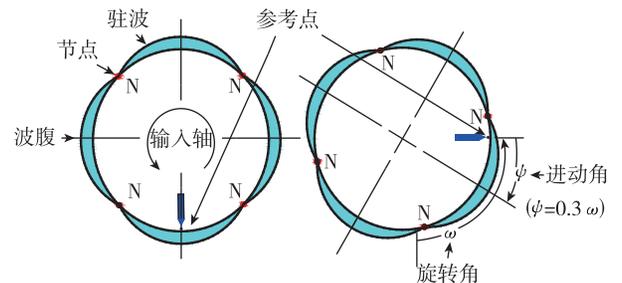


图 2 谐振子角度滞后原理示意图

Fig. 2 The angular hysteresis principle of hemispherical resonator

### 2.2 半球谐振子的谐振频率

在研究半球谐振子的谐振频率时,除考虑作用在半球谐振子体积元上的惯性力之外,还需要考虑作用在谐振子表面边缘的外力。

设弹性力做的虚功为  $\delta W_K$ ,角速度  $\Omega$  引起的外力做的虚功为  $\delta W_e$ ,振动惯性力做的虚功为  $\delta T$ 。

依据参考文献[10],在位移  $\mathbf{V}$  下,可得振动惯性力  $\mathbf{F}$  所做虚功为

$$\delta T = \int \mathbf{V} d\mathbf{F} = \rho \pi R^2 e^{2i\omega n t} \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (n^2 P^2 + \omega^2) (\sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi + n^2 + 1) \tan^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi h(\varphi) d\varphi C_1 \delta C_1$$

因旋转惯性力在引起旋转加速度  $\mathbf{a}(\Omega) = \mathbf{a}(\Omega_x) + \mathbf{a}(\Omega_{yz})$ ,需要考虑角速度  $\Omega$  引起的外力,依据参考文献[10],可得旋转惯性力所做虚功为

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \rho \pi R^2 e^{2i\omega n t} \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} \left[ -4n^2 \sin^3 \varphi \tan^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \Omega_x P + \sin^3 \varphi (1 + n^2) \tan^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \Omega_x^2 + \right. \\ &\quad \left. f_1(n, \varphi) \Omega_{yz}^2 \right] h(\varphi) d\varphi C_1 \delta C_1 \\ f_1(n, \varphi) &= \frac{1}{2} (\sin^2 \varphi (3 + 2n \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + (\cos^2 \varphi + n)^2 (1 + \cos^2 \varphi)) \tan^{2n} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned}$$

壳体弹性势能由弹性力产生,弹性力所做虚功为

$$\delta W_K = -\pi e^{2i\omega n t} \left( \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} \frac{E}{(1+\mu)R^2} \frac{n^2(n^2-1)^2}{3\sin^3\varphi} \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right) h^3(\varphi) d\varphi + R^2 \rho \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (f_2(n, \varphi) \boldsymbol{\Omega}_x^2 + f_3(n, \varphi) \boldsymbol{\Omega}_{yz}^2) h(\varphi) d\varphi \right) C_1 \delta C_1$$

$$f_2(n, \varphi) = (n + \cos\varphi)^2 (\sin^2\varphi + n^2) (\varphi \cos\varphi + \sin^2\varphi) \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin^4\varphi (\sin^2\varphi - 2n(n + \cos\varphi)) \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$f_3(n, \varphi) = \frac{1}{2} (n^2 + \sin^2\varphi) (\cos\varphi + n)^2 (\varphi \cos\varphi + 1 + \cos^2\varphi) \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin^2\varphi (\cos^2\varphi + 1) (\sin^2\varphi - 2n(n + \cos\varphi)) \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

根据虚位移原理,保持静止的条件是虚位移所做的功总和为0,可得

$$\delta T + \delta W_e + \delta W_K = 0$$

由此可得半球谐振子的谐振频率为

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_0}{k_m}} \quad (6)$$

其中

$$k_m = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (\sin^2\varphi + 2n\cos\varphi + n^2 + 1) \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\varphi h(\varphi) d\varphi$$

$$k_0 = \frac{En^2(n^2-1)^2}{\rho(1+\mu)R^4} \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} \frac{1}{3\sin^3\varphi} \cdot \tan^{2n}\left(\frac{\varphi}{2}\right) h(\varphi) d\varphi$$

### 2.3 半球谐振子振型的进动因子

当谐振子在惯性空间以角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  旋转时,此时,环向振型则以  $\boldsymbol{P} = K\boldsymbol{\Omega}_x$  的速率沿  $\boldsymbol{\Omega}_x$  的反向转过  $\psi$  角<sup>[11-12]</sup>。

半球谐振子壳体任一点处惯性力为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Omega}_x) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Omega}_{yz})$$

其中:  $\boldsymbol{F}_0$ 、 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Omega}_x)$  和  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\Omega}_{yz})$  分别为半球谐振子不旋转时的惯性力,在虚位移下所做的虚功为

$$\delta T = \delta T_0 + \delta T(\boldsymbol{\Omega}_x) + \delta T(\boldsymbol{\Omega}_{yz}) + \delta T(\boldsymbol{\Omega}) - \delta W(\boldsymbol{\Omega})$$

其中

$$\delta T_0 = \omega^2 \pi \rho \cos^2 \omega t \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} [u(\varphi) \delta u + v(\varphi) \delta v + w(\varphi) \delta w] Rh(\varphi) d\varphi$$

$$\delta T(\boldsymbol{\Omega}_x) = n^2 P^2 \pi \rho \cos^2 \omega t \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} [u(\varphi) \delta u + v(\varphi) \delta v + w(\varphi) \delta w] Rh(\varphi) d\varphi + 2\pi \rho n P \boldsymbol{\Omega}_x \cos^2 \omega t \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} [\cos\varphi v(\varphi) \delta u + \cos\varphi u(\varphi) \delta v + \sin\varphi v(\varphi) \delta w + \sin\varphi w(\varphi) \delta v] Rh(\varphi) d\varphi$$

$$\delta W_K = \delta(-U)$$

依据参考文献[10],可得弹性力所作虚功为

$$\delta T(\boldsymbol{\Omega}_{yz}) = 0$$

$\delta W(\boldsymbol{\Omega})$  为由  $\boldsymbol{\Omega}$  引起的初始弹性力所做虚功,即  $\delta W_{K_0}$ , 于是由虚位移原理可得

$$\delta T + \delta W_{K_0} = 0$$

即

$$\delta W_{K_0} - \delta W_K(\boldsymbol{\Omega}) + \delta T_0 + \delta T(\boldsymbol{\Omega}) = 0$$

在半球谐振子振动模式中,  $\delta W_{K_0} - \delta W_K(\boldsymbol{\Omega})$  为模态弹性力的虚功,  $\delta T_0$  为该模态下弹性力所做虚功。当谐振子在惯性空间以角速度  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_x + \boldsymbol{\Omega}_{yz}$  旋转时,其沿  $\boldsymbol{\Omega}_x$  的旋转为主振动,根据主振动能量保持不变、主振动动能与势能之和保持不变的原理可知,当半球谐振子壳体发生转动时,可得

$$\delta T(\boldsymbol{\Omega}_x) = 0$$

设

$$G_1 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} [\cos\varphi v(\varphi) \delta u + \cos\varphi u(\varphi) \delta v + \sin\varphi v(\varphi) \delta w + \sin\varphi w(\varphi) \delta v] Rh(\varphi) d\varphi$$

$$G_2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_F} [u(\varphi) \delta u + v(\varphi) \delta v + w(\varphi) \delta w] R^2 h(\varphi) d\varphi$$

可得

$$nPG_1 + 2G_2\boldsymbol{\Omega}_x = 0$$

整理可得进动因子

$$K = \frac{\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{\Omega}_x} = -\frac{2}{n} \frac{G_2}{G_1} \quad (7)$$

其中,  $G_1$  和  $G_2$  只与振型以及谐振子的约束关系和壳体的几何特性有关,也反映了壳体上产生的哥氏效应和惯性力的大小。

### 3 谐振子参数误差对陀螺性能的影响

本文针对某型高精度半球陀螺谐振子成型技术研究要求:设计球半径为 15mm,为保证谐振频率的

稳定性,球壳半径误差不大于 0.014%,约为 2 $\mu$ m;谐振子壁厚 0.6mm,壁厚误差不大于 0.067%,约为 0.402 $\mu$ m;球壳球度不大于 0.0003mm;支撑杆半径 2mm,支撑杆误差不大于 0.13%,约为 7.8 $\mu$ m;由支撑杆半径和半球壳半径的比值可得底端角  $\varphi_0 = 7.3^\circ$ ;顶端角与底端角精度不大于 0.01°;支撑杆与半球同轴度不大于 0.0015mm,品质因数 Q 值不小于  $1 \times 10^7$ 。

### 3.1 最佳环向波数

采用式(6)与式(7)对半球谐振子的谐振频率和进动因子进行计算,如表 1 所示。

表 1 半球谐振频率与进动因子

Tab. 1 The resonant frequency and precession factor of hemispherical resonator

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	
$\omega_n/\text{Hz}$	905	2804	5620	9307	
$K$	$\varphi_0=0^\circ$	-0.2978239	-0.0659867	-0.0231877	-0.0102203
	$\varphi_0=7.3^\circ$	-0.2981762	-0.0659901	-0.0231877	-0.0102203

随着半球谐振子环向波数  $n$  的增加,半球谐振子振型越来越复杂,维持谐振子振动的能量持续增加,谐振频率也越来越高。而半球谐振子的进动因子随环向波数  $n$  单调减小,振型的进动特性减弱,检测灵敏度降低。

从半球谐振子能量损耗的角度考虑,希望维持半球谐振子振型所需能量越少越好,而且,振型的复杂变化不利于半球谐振子的激振和信号检测与控制。综合考虑 HRG 工程应用要求和振动实现条件,半球谐振子振型选取最佳环向波数为  $n=2$ ,此时  $K \approx 0.3$ 。本文后续分析采用环向波数为  $n=2$ 。

### 3.2 顶端角与底端角对进动因子的影响

为便于分析,设半球谐振子进动因子  $K$  的变化率为

$$\sigma_K = \Delta K / K_0$$

其中,  $K_0$  是谐振子结构参数满足设计要求( $\varphi_0 = 7.3^\circ, \varphi_F = 90^\circ$ )时的进动因子,  $\Delta K$  是进动因子变化量<sup>[13-14]</sup>。

进动因子  $K$  的具体表达式如下

$$K = -\frac{2}{n} \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi_F} 4 \sin^2 \varphi \cos \varphi \tan^n \frac{\varphi}{2} h(\varphi) d\varphi}{\int_{\varphi_0}^{\varphi_F} (n^2 + 2n \cos \varphi + \cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) \tan^n \frac{\varphi}{2} h(\varphi) d\varphi} \quad (8)$$

当振型环向波数为 2 时,谐振子顶端角  $\varphi_F, \varphi_0$  与  $K$  的关系如图 3 和图 4 所示。

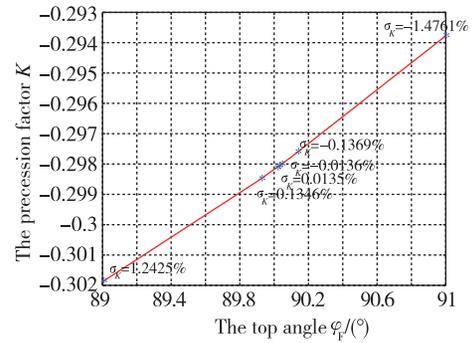


图 3  $\varphi_F$  与  $K$  关系图 ( $\varphi_0 = 7.3^\circ$ )

Fig. 3 The relationship between  $\varphi_F$  and  $K$  ( $\varphi_0 = 7.3^\circ$ )

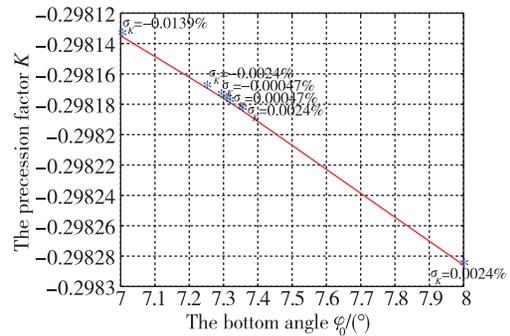


图 4  $\varphi_0$  与  $K$  关系图 ( $\varphi_F = 90^\circ$ )

Fig. 4 The relationship between  $\varphi_0$  and  $K$  ( $\varphi_F = 90^\circ$ )

由图 3 和图 4 可知:

当谐振子结构参数满足设计要求时,即  $\varphi_0 = 7.3^\circ, \varphi_F = 90^\circ$ ,理想进动因子  $K_0 = -0.2981762$ ;当  $\varphi_0$  变化区间为  $[7^\circ, 8^\circ]$  时,其  $\sigma_K$  的变化区间为  $[-0.0139\%, 0.00037\%]$ ,即进动因子  $K$  对底端角  $\varphi_0$  变化不敏感;而当  $\varphi_F$  变化区间为  $[89^\circ, 91^\circ]$  时,其  $\sigma_K$  的变化区间为  $[1.2425\%, -1.4761\%]$ ,即进动因子  $K$  对顶端角  $\varphi_F$  变化相对敏感。

设计指标中要求半球谐振子顶端角精度不大于  $0.01^\circ$ 。

当  $\Delta\varphi_0 = 0.01^\circ$  时,  $\Delta K = 1.2 \times 10^{-6}$ ,如果输入角速度是  $1^\circ/\text{s}$ ,则由  $\Delta K$  引起的角速度误差是  $\Delta\Omega = 0.00432^\circ/\text{h}$ 。

当  $\Delta\varphi_F = 0.01^\circ$  时,  $\Delta K = 4 \times 10^{-5}$ ,如果输入角速度是  $1^\circ/\text{s}$ ,则由  $\Delta K$  引起的角速度误差是  $\Delta\Omega = 0.144^\circ/\text{h}$ 。

由此可知,  $\Delta\varphi_0$  引起的角速度误差远远小于相同的  $\Delta\varphi_F$  引起的角速度误差。

### 3.3 壁厚不均匀对进动因子的影响

加工高精度球壳结构半球谐振子是半球谐振陀螺的技术核心,参考国内外半球谐振子超精密加工技术的研究成果和经验,结合熔融石英玻璃在加工中存在的技术瓶颈,针对半球谐振子的材料和结构特点,充分考虑熔融石英玻璃的加工性能,进行加工性能研究。

对于环向波数固定的振型,由于加工造成的壁厚不均匀会引起谐振频率变化,同时也会对进动因子产生影响,其影响主要分为以下两种情况:

1) 谐振子底部壁厚增加,此时谐振子壁厚变化规律函数如下

$$h(\varphi) = h(1 + \alpha \cos\varphi)$$

2) 谐振子顶部壁厚增加,此时谐振子壁厚变化规律函数如下

$$h(\varphi) = h(1 + \alpha \sin\varphi)$$

其中,半球谐振子的球心角  $\varphi$  的变化为  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ,  $\alpha$  是壁厚变化因子。

当振型环向波数为 2 时,谐振子底部与顶部壁厚增加时  $K$  的变化如图 5 和图 6 所示。

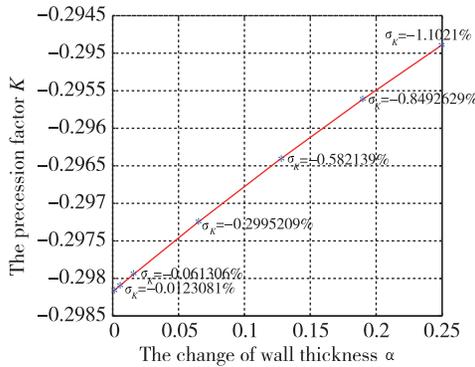


图 5 底部壁厚增加时的进动因子

Fig. 5 The precession factor with increasing of bottom wall thickness

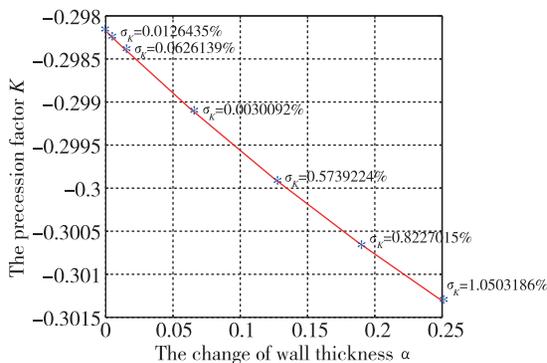


图 6 顶部壁厚增加时的进动因子

Fig. 6 The precession factor with increasing of top wall thickness

由图 5 和图 6 可知,半球谐振子底部壁厚增加使进动因子  $K$  的绝对值减小,当  $\alpha$  变化区间为  $[0, 0.25]$  时,其  $\sigma_K$  的变化区间为  $[-0.012308\%, -1.1021\%]$ ;半球谐振子顶部壁厚增加使进动因子  $K$  的绝对值增加,当  $\alpha$  变化区间为  $[0, 0.25]$  时,其  $\sigma_K$  的变化区间为  $[0.0126435\%, 1.0503186\%]$ 。

## 4 仿真设计

### 4.1 半球谐振子有限元分析

有限元分析是利用数学近似方法对真实物理系统进行模拟仿真分析。半球谐振子旋转引起的特性变化会影响 HRG 的工作性能,尤其是半球谐振子结构是影响半球谐振子振动特性的关键因素,因此必须对半球谐振子振动特性以及影响半球谐振子振动特性的因素进行分析。本文采用有限元计算方法对半球谐振子模态进行分析,最终识别半球谐振子的模态参数,为其振动特性分析、振动故障诊断和预报以及结构动力特性优化设计提供依据。

假定半球谐振子在没有旋转的自由状态下作有阻尼或无阻尼振动,此时多自由度运动的微分方程表示为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (9)$$

其中,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  为加速度向量,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  为速度向量,  $\mathbf{x}(t)$  为位移向量,  $\mathbf{Q}(t)$  为半球谐振子结点载荷向量。  $M$ 、 $C$  和  $K$  分别是半球谐振子的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵<sup>[15]</sup>。

将式(9)时间域方程变换到拉氏域复变量  $p$ ,并假设初始位移和初始速度为 0,则得到拉氏域方程

$$Mp^2 + Cp + K = Q(p) \quad (10)$$

经过变换可得传递函数

$$H(p) = \frac{1/M}{p^2 + (C/M)p + (K/M)} \quad (11)$$

它的根即是极点

$$\lambda_{1,2} = -(C/(2M)) \pm \sqrt{(C/(2M))^2 - (K/M)} \quad (12)$$

定义固有频率为:  $\omega_n = \sqrt{K/M}$ 。

假设半球谐振子在一个振荡周期内能量损失非常微小,为便于分析,近似忽略施加在半球谐振子上的阻尼影响,此时,微分方程简化为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}(t) \quad (13)$$

当半球谐振子的结点载荷向量为 0 时,则微分方程进一步简化为

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = 0 \quad (14)$$

式(14)为半球谐振子的自由振动方程,又称为动力特性方程,由此方程可以解出半球谐振子的固有频率和固有振型。

#### 4.2 半球谐振子有限元仿真

对于高品质半球谐振子,一方面要保证谐振频率稳定性,另一方面还要保证振型稳定性。目前,半球谐振子的理想材料为熔融石英玻璃。采用这种材料的半球谐振子具有稳定的振动频率、短延迟时间、高机械稳定性、低热膨胀率和较大的内应力。采用熔融石英玻璃制造的半球谐振子能够在较大的温度范围内工作,降低维持陀螺振动所需的能量损耗。在制造加工过程中,半球谐振子的倾斜、旋转以及支撑杆的变形和振动都是对陀螺正常工作极其有害的,因此应尽量避免。

半球谐振子要求熔融石英玻璃具有各向同性和高的品质因数,要求温度系数小且系数稳定。通常弹性模量  $E = 7.67 \times 10^{10} \text{ Pa}$ ,泊松比  $\mu = 0.17$ ,密度  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ 。本文 HRG 工作时的边界约束为底端固定,顶端自由,仿真中采用的具体方法是在 ANSYS 中对支杆底端面的所有自由度均进行限制,半球谐振子及以下部分采用自由状态。

为减少半球谐振子建模的工作量,在建立模型时采用 AUTOCAD 进行静态模型建立,再导入 ANSYS 中,最终映射网格划分。半球谐振子模型与网格划分如图 7(a)与图 7(b)所示。

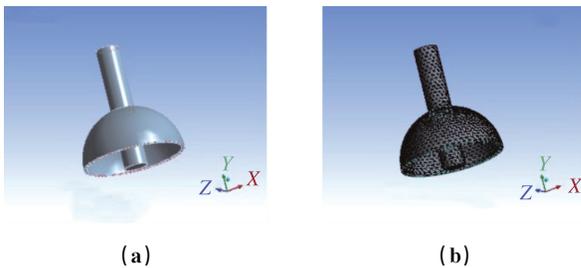


图 7 半球谐振子模型与网格划分  
Fig. 7 The grid and model of hemispherical resonator

半球谐振子中间支杆底端固定情况下,对半球谐振子施加力,仿真结果中半球谐振子与下半段支杆的颜色发生改变,也即发生了变形。从谐振子总变形平视图中可以发现,半球谐振子与杆的变形是越靠近半球边缘,其变形越大,呈递进趋势。半球谐振子总变形平视图与底视图如图 8(a)与图 8(b)所示。

在半球谐振子中间支杆底端固定、顶端自由情况下,其应力变化是半球谐振子与杆连接处最大,从支杆向外逐渐减小。应力变化较大的地方为中心杆和

半球谐振子的接触面,且由内向外延伸,并随着半球谐振子的移动,发生了一定的形变。半球谐振子等效应力平视图与底视图如图 9(a)与图 9(b)所示。

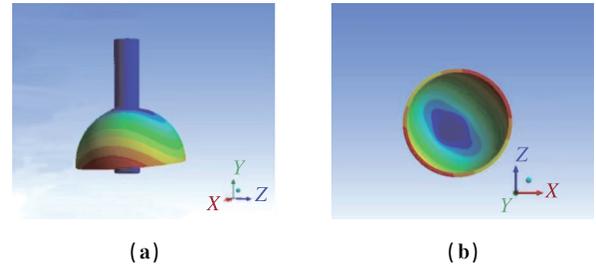


图 8 半球谐振子总变形平视图与底视图

Fig. 8 The plan view and bottom view of the overall deformation of hemispherical resonator

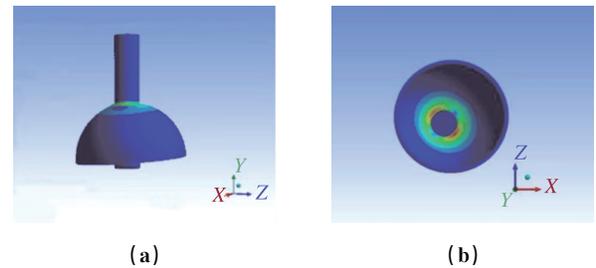


图 9 半球谐振子等效应力平视图与底视图

Fig. 9 The plan view and bottom view of hemispherical resonator SEQV

## 5 结论

本文针对 HRG 能量型谐振子数学模型,研究非理想因素对谐振频率和进动因子的影响,以及谐振子顶端角、底端角和壁厚的非理想性对进动因子的影响。其中,HRG 的进动因子对顶端角变化的敏感性远大于对底端角变化的敏感性,且顶端角变化引起的 HRG 角速度误差远大于相同底端角变化引起的 HRG 角速度误差。因此,在实际制造过程中,对顶端角的制造精度要求远高于对底端角的制造精度要求。随着半球谐振子壁厚增加,半球谐振子刚度将随之增加,谐振频率也随之增加,谐振频率的增加将使半球谐振子不易激振。而且当半球壳壁厚减少时,由于制造上所造成的非轴对称影响非常显著,也会导致测量误差增加。因此,在实际加工制造过程中,壁厚选择需要综合考虑,其加工制造精度也是精密加工中最难以保证的环节,是半球谐振子研制的技术瓶颈。

## 参考文献

- [1] Delhay F. HRG by SAFRAN, the game-changing technology[C]// Proceedings of 5<sup>th</sup> IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems. Lake Como, Italy, 2018.
- [2] Jeanroy A, Grosset G, Goudon J C, et al. HRG by Sagem from laboratory to mass production[C]// Proceedings of 2016 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems. Laguna Beach, CA, 2016: 1-4.
- [3] 潘瑶, 曲天良, 杨开勇, 等. 半球谐振陀螺研究现状与发展趋势[J]. 导航定位与授时, 2017, 4(2): 9-13.  
Pan Yao, Qu Tianliang, Yang Kaiyong, et al. Hemispherical resonator gyroscope: current advances and future trends[J]. Navigation Positioning & Timing, 2017, 4(2): 9-13(in Chinese).
- [4] 高胜利, 吴简彤. 半球谐振陀螺的漂移机理及其控制[J]. 弹箭与制导学报, 2008, 28(3): 61-64.  
Gao Shengli, Wu Jiantong. Drift mechanisms & control of hemispherical resonant gyro[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance, 2008, 28(3): 61-64(in Chinese).
- [5] 方针, 刘书海, 余波. 半球谐振陀螺的基础理论研究[J]. 导航定位与授时, 2017, 4(2): 72-78.  
Fang Zhen, Liu Shuhai, Yu Bo. Study of basic theories of hemispherical resonator gyros[J]. Navigation Positioning & Timing, 2017, 4(2): 72-78(in Chinese).
- [6] B. A. 马特维耶夫, B. И. 利帕特尼科夫, A. V. 阿廖欣, 等. 固体波动陀螺[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.  
Матвеев В А, Липатников В И, Алехин А В, et al. Solide state wave gyro[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009(in Chinese).
- [7] 赵洪波, 任顺清, 李巍. 半球谐振子动力学方程的建立及固有频率的计算[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2010, 42(11): 1702-1706.  
Zhao Hongbo, Ren Shunqing, Li Wei. Establishment of dynamics equation of HRG resonator and calculation of natural frequency[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2010, 42(11): 1702-1706(in Chinese).
- [8] 樊尚春, 刘广玉. 半球谐振陀螺振子耦合振动的近似解析分析[J]. 北京航空航天大学学报, 1997(6): 38-43.  
Fan Shangchun, Liu Guangyu. Approximately analyzing of coupling vibration of resonator for HRG[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1997(6): 38-43(in Chinese).
- [9] 王旭, 方针, 吴文启, 等. 基于二维质点振动模型的半球谐振陀螺谐振子进动分析[J]. 中国惯性技术学报, 2011, 19(5): 621-626.  
Wang Xu, Fang Zhen, Wu Wenqi, et al. Precession analysis of HRG resonator based on two dimensional mass vibrations[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2011, 19(5): 621-626(in Chinese).
- [10] 樊尚春, 刘广玉, 王振均. 半球谐振陀螺的理论及实验研究[J]. 测控技术, 1994(1): 29-33+2.  
Fan Shangchun, Liu Guangyu, Wang Zhenjun. Theory and experimenton hemispherieal resonator gyro[J]. Measurement & Control Technology, 1994(1): 29-33+2(in Chinese).
- [11] Qiu B, Wang J, Li P. Full digital control of hemispherical resonator gyro under force-to-rebalance mode[J]. IEEE Sensors Journal, 2015, 15(1): 71-75.
- [12] 徐泽远, 伊国兴, 魏振楠, 等. 一种半球谐振陀螺谐振子动力学建模方法[J]. 航空学报, 2018, 39(3): 139-149.  
Xu Zeyuan, Yi Guoxing, Wei Zhennan, et al. A dynamic modeling method for resonator of hemispherical resonator gyro[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(3): 139-149(in Chinese).
- [13] 樊尚春, 刘广玉. 半球谐振陀螺振子耦合振动的有限元分析[J]. 仪器仪表学报, 1995(3): 281-287.  
Fan Shangchun, Liu Guangyu. Finite element analysis of coupling vibration of resnator for HRG[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 1995(3): 281-287(in Chinese).
- [14] 余波, 方针, 蒋春桥. 基于有限元法的半球谐振陀螺谐振子分析[J]. 压电与声光, 2015, 37(4): 561-564  
Yu Bo, Fang Zhen, Jiang Chunqiao. Finite element analysis based on optimized HRG resonator[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2015, 37(4): 561-564(in Chinese).
- [15] 沈博昌, 伊国兴, 任顺清, 等. 半球谐振陀螺仪谐振子振动特性的有限元分析[J]. 中国惯性技术学报, 2004(6): 58-62.  
Shen Bochang, Yi Guoxing, Ren Shunqing, et al. Finite element analysis on resonator's characteristics of HRG[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2004(6): 58-62(in Chinese).