

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2020.01.011

# 基于冗余伪观测的自适应滤波算法

蒋刘洋, 张 海

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

**摘要:** 现有的二阶互差分(SOMD)算法能够给出与状态估计误差解耦的观测噪声协方差估计,但是需要满足冗余测量的条件,但这一条件往往难以满足。针对这一问题,提出了一种利用状态预测值构造相邻2个时刻伪观测的方法,将原SOMD算法扩展到具有单测量的系统中。使用目标跟踪问题对该算法的有效性进行验证。仿真结果表明,当采样周期较小时,该算法能够忽略状态估计误差的影响并给出较准确的观测噪声方差,在精度和鲁棒性方面优于其他参考算法。

**关键词:** 自适应滤波; 观测噪声方差; 冗余测量; 伪观测; 目标跟踪

中图分类号: V448

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



文章编号: 2095-8110(2020)01-0073-07

## Pseudo Redundant Measurement-Based Adaptive Kalman Filter

JIANG Liu-yang, ZHANG Hai

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Existing second-order mutual difference (SOMD) algorithm can give the estimation of measurement noise covariance decoupled with the state estimation error, but it requires redundant measurements which are generally not satisfied. This paper proposes a method for constructing pseudo-measurement of two adjacent moments using state prediction, and then the SOMD algorithm is expanded to the system with a single measurement. The efficiency of the approach is verified via a target tracking problem. Simulation results indicate that the proposed algorithm can ignore the influence of state estimation error when the sampling period is small and provide accurate measurement noise properties, which is superior to other reference algorithms in accuracy and robustness.

**Key words:** Adaptive filters; Measurement noise covariance; Redundant measurement; Pseudo-measurement; Target tracking

### 0 引言

经典的卡尔曼滤波要求在确定的系统模型和观测方程下,对系统噪声和量测噪声的统计特性具有准确的先验知识<sup>[1]</sup>,因此噪声分布在卡尔曼滤波

器的状态估计中起着非常重要的作用。然而在多数实际应用中,噪声的统计特性通常是未知的,往往被经验值替代;此外还会因为受到环境等因素的影响而发生改变。上述情况都会使预设的噪声方差不能准确地反映当前系统模型的随机噪声特性,

收稿日期:2019-05-31;修订日期:2019-07-26

基金项目:国家重点研发计划(2017YFC0821102, 2016YFB0502004);北京市科技计划项目(Z171100000517006)

作者简介:蒋刘洋(1986-),女,博士,主要从事随机系统和自适应滤波理论的研究。E-mail:lyjiang@buaa.edu.cn

导致估计精度下降,甚至滤波器发散。自适应滤波是一种具有抑制滤波器发散作用的方法,其在滤波计算过程中,同时对未知的或不确切的系统模型参数和噪声统计参数进行估计和修正。自适应滤波方法有很多,从滤波器结构的角度划分,大体上可分为两类:基于多模型的自适应估计(Multiple Model Adaptive Estimation, MMAE)和基于新息/残差的自适应估计(Innovation-based Adaptive Estimation, IAE/Residual-based Adaptive Estimation, RAE)<sup>[2-3]</sup>。

MMAE是由Magill于1965年提出的<sup>[4]</sup>,当系统模型未知或不确定时,该方法仍能给出较准确的状态估计结果。标准的MMAE滤波器同时运行一组卡尔曼滤波器,其中的每个滤波器使用不同的系统动态模型或随机噪声模型,然后基于Bayes方法通过新息或残差计算每个模型是正确模型的概率,最后对每个滤波器的输出结果做加权得到最优的状态估计<sup>[5-6]</sup>。在实际应用中,当系统模型由于某些未知原因发生变化时,该方法仍能给出较高精度的状态估计结果,因此,故障诊断是其最具潜力的应用领域之一<sup>[7-8]</sup>。

IAE/RAE方法是对经典卡尔曼滤波方法的一个扩展,通过额外的程序对过程噪声方差矩阵与观测噪声方差矩阵进行自适应估计和调节,使其不断地适应系统的变化<sup>[9]</sup>。近年来,IAE/RAE算法取得了很多新的进展:文献[10]提出了一种使用新息向量及其滞后时刻向量的自协方差函数来估计过程噪声方差矩阵与观测噪声方差矩阵的最小二乘回归法。文献[11]提出了一种具有鲁棒性的抗差自适应卡尔曼滤波(Robust Adaptive Kalman Filtering, RAKF)算法,RAKF利用一个自适应因子来调节状态预测误差的协方差矩阵。该自适应因子是通过比较实际的新息协方差矩阵与其对应的理论值来计算获得的,且其值大于1,故RAKF为新的量测值提供了更多的权重,增强了滤波器的鲁棒性。文献[12]基于Sage-Husa自适应滤波,引入改进的时变噪声估计器实时估计噪声的统计特性。此外,文献[13]基于新息和残差的相关性推导出了一个包含过程噪声协方差的线性矩阵方程,从而实时解决过程噪声方差矩阵。

值得注意的是,上述几种算法都是基于新息和残差向量完成的自适应调节,但是作为数据基础的新息/残差向量耦合了状态量的估计误差。因此,当状态估计误差较大时,调节因子的计算会受到影

响,进一步影响到系统噪声方差阵或状态误差协方差阵的估计和调节,从而导致滤波器输出的不准确甚至发散<sup>[14]</sup>。

为了克服这一问题,有学者提出了基于冗余测量的二阶互差分(Second Order Mutual Difference, SOMD)算法来估计观测噪声方差矩阵<sup>[15-16]</sup>。该算法的主要思想是利用一个观测序列作为参考来估计另一个观测序列的观测噪声方差矩阵,获得的噪声方差矩阵只与测量系统自身相关,而与滤波系统的其余参数无关,因此与状态估计误差解耦。在此基础上,文献[17]研究了同时估计两种观测系统噪声方差矩阵的算法。然而,由于成本的约束,多数实际系统不能满足冗余测量的前提条件,限制了该算法的应用。

考虑到SOMD算法的优越性,为了避免冗余测量条件的限制,本文通过构建伪测量序列,将SOMD算法扩展到只具有单一测量系统的应用中,使其适用于更广泛的应用场景。

## 1 SOMD算法简介

本节介绍了一种基于冗余观测利用SOMD序列估计观测噪声方差阵的算法<sup>[15]</sup>,其主要思想是当被观测对象存在2个不同的观测系统时,根据测量序列的变化关系,分别计算2个序列的一阶自差分序列以及SOMD序列,并通过统计的方法获得观测系统的噪声统计特性。

针对如下描述的线性随机离散系统

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_k &= \Phi_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \\ \mathbf{Z}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{X}_k$ 为系统状态; $\Phi_{k,k-1}$ 为状态转移矩阵; $\mathbf{Z}_k$ 为量测量; $\mathbf{H}_k$ 为量测矩阵。 $\mathbf{W}_{k-1}$ 为过程噪声, $\mathbf{V}_k$ 为量测噪声,且有

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}_k] &= 0, E[\mathbf{W}_k \mathbf{W}_j^T] = \mathbf{Q}_k \delta_{kj} \\ E[\mathbf{V}_k] &= 0, E[\mathbf{V}_k \mathbf{V}_j^T] = \mathbf{R}_k \delta_{kj} \\ E[\mathbf{W}_k \mathbf{V}_j^T] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $E[\cdot]$ 为数学期望算子; $\delta_{kj}$ 为Kronecker- $\delta$ 函数。

SOMD算法具体如下:

定理1. 假设 $\mathbf{Z}_k^1$ 和 $\mathbf{Z}_k^2$ 为2个不同观测系统在 $k$ 时刻对被测对象 $\mathbf{Z}_k$ 的测量值,二者互为冗余观测,其定义为

$$\mathbf{Z}_k^i = \mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_k^i + \mathbf{V}_k^i, i = 1, 2 \quad (3)$$

式中, $\mathbf{Z}_k^i$ 为 $\mathbf{Z}_k$ 的理想观测值; $\mathbf{S}_k^i$ 为观测系统 $i$

的确定性误差;  $\mathbf{V}_k^1$  和  $\mathbf{V}_k^2$  是  $k$  时刻相互独立的测量白噪声, 其方差分别为  $\mathbf{R}_k^1$  和  $\mathbf{R}_k^2$ 。

构造 2 个测量系统的一阶自差分序列以及 SOMD 序列如下

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{Z}_k^i = \mathbf{Z}_k^i - \mathbf{Z}_{k-1}^i, i = 1, 2 \\ \Delta(\Delta \mathbf{Z}_k^{12}) = \Delta \mathbf{Z}_k^1 - \Delta \mathbf{Z}_k^2 \end{cases} \quad (4)$$

如果 2 个测量系统的精度存在极差, 即

$$E[\mathbf{V}_k^2(\mathbf{V}_k^2)^T] \ll E[\mathbf{V}_k^1(\mathbf{V}_k^1)^T] \quad (5)$$

那么方差较大的噪声方差为

$$\mathbf{R}_k^1 \approx \text{Var}[\Delta(\Delta \mathbf{Z}_k^{12})]/2 \quad (6)$$

SOMD 算法主要有如下特点:

1) 测量系统的确定性误差通常在短时间内比较稳定, 通过求取一阶自差分序列可将其消除。

2) 被测对象在短时间内有可能存在状态突变的现象, 在一阶自差分序列中不能被消除, 但是 SOMD 序列可将其完全抵消掉, 进而只保留随机噪声项。这也是该方法最突出的特点。

3) 与传统的自适应滤波方案不同, SOMD 算法将噪声估计作为一个独立的问题进行研究, 脱离了对滤波系统的依赖, 实现噪声估计与滤波状态估计的解耦。因此, 该方法对噪声特性估计的鲁棒性更强。

但是, 定理 1 要求具有冗余测量系统, 并且 2 个测量系统的精度之间存在极差, 限制了其应用。若要将定理 1 扩展到单一测量系统, 必须提供一个额外的观测系统作为冗余观测, 并且确保其噪声是与直接观测系统的测量噪声不相关的白噪声。

## 2 基于伪观测的 SOMD 算法

### 2.1 基于伪观测的噪声方差矩阵的估计

在本节中, 提出了一种构造伪观测的方法, 并利用伪观测在 SOMD 算法的基础上给出了观测噪声方差矩阵的估计(PSOMD)。

定理 2. 对于线性离散随机系统(1), 定义相邻 2 个时刻的伪观测以及其一阶自差分序列如下

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k^p = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-2} \\ \mathbf{Z}_{k-1}^p = \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-2} \\ \Delta \mathbf{Z}_k^p = \mathbf{Z}_k^p - \mathbf{Z}_{k-1}^p \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-2}$  和  $\hat{\mathbf{X}}_{k|k-2}$  分别为基于滤波状态  $\hat{\mathbf{X}}_{k-2}$  的一步和两步状态预测值。

如果采样时间  $T_s$  比较小, 那么单一测量系统的观测噪声方差可以通过式(8)获得

$$\hat{\mathbf{R}}_k \approx [\text{Var}(\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p) - \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T]/2 \quad (8)$$

式中,  $\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p$  为由直接观测和伪观测的一阶自差分序列构成的 SOMD 序列。

证明: 根据系统(1), 直接观测的一阶自差分序列为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Z}_k &= \mathbf{Z}_k - \mathbf{Z}_{k-1} \\ &= (\mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k) - (\mathbf{H}_{k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{V}_{k-1}) \\ &= (\mathbf{Z}_k^r - \mathbf{Z}_{k-1}^r) + (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{Z}_k^r$  和  $\mathbf{Z}_{k-1}^r$  如上式所定义, 分别表示  $\mathbf{Z}_k$  和  $\mathbf{Z}_{k-1}$  的理想值。

基于同一时刻滤波状态  $\hat{\mathbf{X}}_{k-2}$  的一步预测和两步预测状态为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-2} = \Phi_{k-1, k-2} \hat{\mathbf{X}}_{k-2} \\ \hat{\mathbf{X}}_{k|k-2} = \Phi_{k, k-2} \hat{\mathbf{X}}_{k-2} \end{cases} \quad (10)$$

记预测状态和真实状态的误差为  $\tilde{\mathbf{X}}$ , 则有

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k-2} = \mathbf{X}_{k-2} - \hat{\mathbf{X}}_{k-2} \quad (11)$$

那么伪观测的一阶自差分序列为

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Z}_k^p &= \mathbf{Z}_k^p - \mathbf{Z}_{k-1}^p = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \hat{\mathbf{X}}_{k-1|k-2} \\ &= \mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} \hat{\mathbf{X}}_{k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2} \hat{\mathbf{X}}_{k-2} \\ &= \mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} (\mathbf{X}_{k-2} - \tilde{\mathbf{X}}_{k-2}) - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2} (\mathbf{X}_{k-2} - \tilde{\mathbf{X}}_{k-2}) \\ &= \mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} \mathbf{X}_{k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2} \mathbf{X}_{k-2} - \\ &\quad (\mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2}) \tilde{\mathbf{X}}_{k-2} \\ &= \mathbf{H}_k (\mathbf{X}_k - \Phi_{k, k-1} \mathbf{W}_{k-2} - \mathbf{W}_{k-1}) - \mathbf{H}_{k-1} (\mathbf{X}_{k-1} - \\ &\quad \mathbf{W}_{k-2}) - (\mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2}) \tilde{\mathbf{X}}_{k-2} \\ &= (\mathbf{Z}_k^r - \mathbf{Z}_{k-1}^r) - \mathbf{V}_k^p \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^p &= \mathbf{H}_k \mathbf{W}_{k-1} + (\mathbf{H}_k \Phi_{k, k-1} - \mathbf{H}_{k-1}) \mathbf{W}_{k-2} + \\ &\quad (\mathbf{H}_k \Phi_{k, k-2} - \mathbf{H}_{k-1} \Phi_{k-1, k-2}) \tilde{\mathbf{X}}_{k-2} \end{aligned} \quad (13)$$

结合式(9), 可得如下 SOMD 序列

$$\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p = (\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_{k-1}) + \mathbf{V}_k^p \quad (14)$$

考虑到状态估计误差  $\tilde{\mathbf{X}}_{k-2}$  中包含的噪声 ( $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{k-3}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{k-2}$ ) 终止于  $k-2$  时刻, 根据式(13)可知,  $\mathbf{V}_k^p$  是  $\mathbf{W}_{k-1}, \mathbf{W}_{k-2}$  和  $\tilde{\mathbf{X}}_{k-2}$  的线性组合。因此, 式(14)等号右侧的两项是不相关的。此外, 由于在相邻 2 个时刻噪声的统计特性可认为保持不变, 对式(14)取方差可得

$$\text{Var}(\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p) = 2\mathbf{R}_k + \text{Var}(\mathbf{V}_k^p) \quad (15)$$

因此

$$\mathbf{R}_k = [\text{Var}(\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p) - \text{Var}(\mathbf{V}_k^p)]/2 \quad (16)$$

由式(16)可知, 只要获得  $\text{Var}(\mathbf{V}_k^p)$ , 就可以得到直接观测的噪声方差矩阵。

对于时不变系统,  $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{k-1}$ 。一般而言,  $\mathbf{H}_k \approx$

$\mathbf{H}_{k-1}$  在较短的时间间隔内也成立,因此式(13)可以简化为

$$\mathbf{V}_k^p \approx \mathbf{H}_k \mathbf{W}_{k-1} + \mathbf{H}_k (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \mathbf{W}_{k-2} + \mathbf{H}_k (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \Phi_{k-1,k-2} \tilde{\mathbf{X}}_{k-2} \quad (17)$$

计算  $\mathbf{V}_k^p$  的方差可得

$$\text{Var}(\mathbf{V}_k^p) = \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{H}_k (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \mathbf{Q}_{k-2} (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I})^T \mathbf{H}_k^T + [\mathbf{H}_k (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \Phi_{k-1,k-2}] \times \mathbf{P}_{k-2} [\mathbf{H}_k (\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \Phi_{k-1,k-2}]^T \quad (18)$$

如果  $\Phi_{k,k-1} = \mathbf{I}$ , 那么  $\text{Var}(\mathbf{V}_k^p) = \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T$  一定成立。此外,假设连续系统模型的系统矩阵为  $\mathbf{A}$ , 那么相应的离散系统的状态转移矩阵为  $\Phi_{k,k-1} = e^{\mathbf{A}T_s}$ 。对于较小的采样周期  $T_s$  来说,  $e^{\mathbf{A}T_s} \approx \mathbf{I}$  成立, 则  $(\Phi_{k,k-1} - \mathbf{I}) \rightarrow 0$ 。基于上述讨论,式(18)可简化为

$$\text{Var}(\mathbf{V}_k^p) \approx \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T \quad (19)$$

将式(19)代入式(16)中,可以得到式(8)。定理得证。

由式(19)可知,状态估计误差的影响在伪观测的一阶差分序列中可以忽略,利用伪观测估计的噪声方差矩阵的准确性只与系统的过程噪声方差矩阵有关。在已知过程噪声方差的先验知识的情况下或存在模型补偿时,上述算法的准确性可以得到保障。

注1:理论上,观测噪声方差矩阵是正定的。由于式(8)中含有减法运算,定理2得到的估计存在负定性的可能。为了保证所得观测噪声方差矩阵的正定性,如果  $\hat{\mathbf{R}}_k \leq 0$ , 根据随机信号的平稳性可用前一时刻的估计值代替,即  $\hat{\mathbf{R}}_k = \hat{\mathbf{R}}_{k-1}$ 。

注2:由于经典的IAE自适应滤波算法中,观测噪声方差矩阵的估计中也包含减法运算,其公式为

$$\hat{\mathbf{R}}_k^{\text{IAE}} = E[\boldsymbol{\varepsilon}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_k)^T] - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \quad (20)$$

式中,  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{X}}_{k|k-1}$  为观测新息;  $\mathbf{P}_k^-$  为状态的预测误差协方差矩阵。根据新息的定义,  $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_k)^T]$  可被认为是观测序列一阶差分的方差。由于平稳序列差分的阶数越高,方差越大,因此,  $E[\boldsymbol{\varepsilon}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_k)^T] < \text{Var}(\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p)$ 。此外,由于

$$\mathbf{P}_k^- = \Phi_{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (21)$$

因此,  $\mathbf{P}_k^- > \mathbf{Q}_{k-1}$ 。对比所提算法和IAE,即对比式(8)和式(20),可以得到

$$\text{Var}(\Delta \mathbf{Z}_k - \Delta \mathbf{Z}_k^p) - \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T > E[\mathbf{v}_k^- (\mathbf{v}_k^-)^T] - \mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T \quad (22)$$

由式(22)可知,相对于IAE自适应滤波算法,本文所提算法更不容易产生非正定的观测噪声方

差估计,也就是说,其计算稳定性优于IAE算法。

## 2.2 PSOMD 算法的实现

在实际应用中,使用整体数据作为样本会造成体现噪声分布变化的动态信息淹没于大量的历史数据中。为了及时适应噪声的变化,以连续滑动开窗的方式,利用当前窗口长度内的数据进行估计,具体如下

$$\hat{\mathbf{R}}_k^- = \frac{1}{2\omega} \sum_{i=0}^{\omega-1} (\Delta \mathbf{Z}_{k-i} - \Delta \mathbf{Z}_{k-i}^p) (\Delta \mathbf{Z}_{k-i} - \Delta \mathbf{Z}_{k-i}^p)^T - \frac{1}{2} \mathbf{H}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_k^T \quad (23)$$

式中,  $\omega$  为滑动窗口的长度。

此外,为了抑制滑动窗口样本不足的影响,采用衰减记忆的方法,引入一个遗忘因子对历史信息进行加权,具体实施如下

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_k = (1 - d_k) \hat{\mathbf{R}}_{k-1} + d_k \hat{\mathbf{R}}_k^- \\ d_k = (1 - b_k) / (1 - b_k^{k+1}) \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $d_k$  为遗忘因子,用来调节当前时刻观测噪声方差矩阵的使用权重;  $\hat{\mathbf{R}}_k^-$  为当前时刻利用PSOMD序列获得的观测噪声方差矩阵的直接输出;  $\hat{\mathbf{R}}_{k-1}$  和  $\hat{\mathbf{R}}_k$  分别为  $k-1$  时刻和  $k$  时刻噪声方差矩阵的最终估计结果。

此外,所提算法对观测噪声方差矩阵的估计效果与采样频率密切相关,采样频率越高,获得的估计精度越高。由于较高的采样频率对计算机的要求也较高,工程应用时可首先尝试采用能够满足要求的低采样频率。

## 3 仿真验证

在本节中,采用目标跟踪问题作为应用来验证所提算法的有效性,并且通过与扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)、RAE以及RAKF算法的比较来证明所提算法的有效性。

考虑在3D笛卡尔坐标系中具有直线运动和机动运动的目标轨迹。总的跟踪时间为140s,前50s目标以恒定的速度200m/s做直线运动,50s~100s之间以相同速度做周期为100s的匀速圆周运动,最后仍以200m/s的速度沿直线飞回,目标轨迹如图1所示。

采用三维位置和速度组成系统状态,建立连续的定常速度的运动模型系统,其过程噪声的功率谱密度为

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & 10^{-5} \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (25)$$

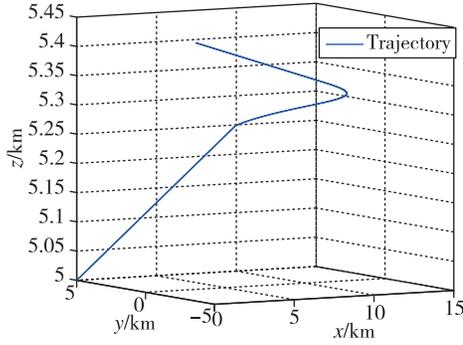


图 1 目标运动轨迹  
Fig. 1 Target trajectory

使用雷达观测距离、俯仰角和方位角, 观测周期  $T_s=0.1s$ 。为了验证所提算法的效果, 将观测噪声方差设置为

$$\mathbf{R}_k = \begin{cases} \text{diag}(2^2, (0.02\pi/180)^2, (0.02\pi/180)^2), & 0s \leq t \leq 100s \\ \text{diag}(10^2, (0.06\pi/180)^2, (0.06\pi/180)^2), & 100s < t \leq 140s \end{cases} \quad (26)$$

由于 RAE 算法也自适应地估计噪声方差矩阵, 故将其与所提算法获得的噪声方差矩阵作对比, 结果如图 2~图 4 所示。由图可知, RAE 给出的噪声方差估计在机动运动时段严重偏离真值, 这是由于其依赖于状态估计误差导致的误差累积造成的。然而, PSOMD 几乎能够在整个跟踪时段给出较准确和稳定的估计(除了噪声方差突然变大之后的过渡阶段, 这是由采样频率较低引起的, 增大采样频率即可解决)。

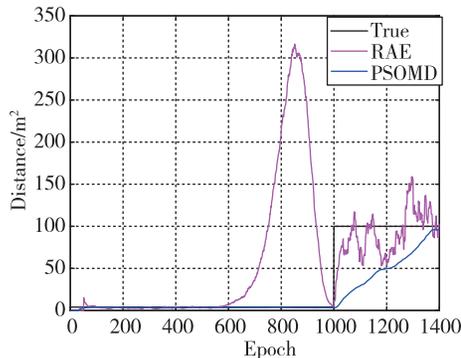


图 2 距离的噪声方差估计  
Fig. 2 Estimation of R on distance

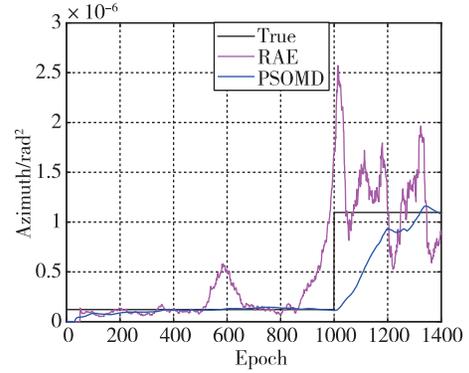


图 3 方位角的噪声方差估计  
Fig. 3 Estimation of R on azimuth

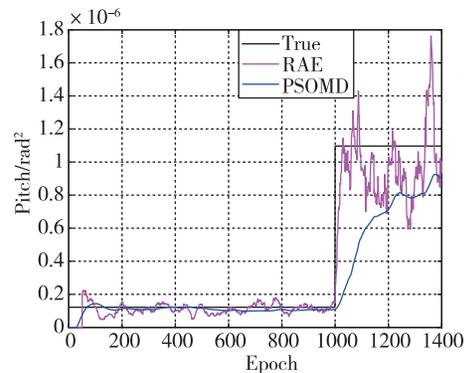


图 4 俯仰角的噪声方差估计  
Fig. 4 Estimation of R on pitch

所有参与比较的自适应滤波算法的位置估计误差如图 5 和图 6 所示。结果表明, 所有算法给出的估计结果在前 50s 没有明显的差异, 这是因为在该时间段内直线运动的模型准确, 观测噪声也没有发生突变。然而, 在 50s 后几种算法之间产生了明显的差异: RAE 在目标机动运动期间表现最差, 这是因为其基于残差序列并且与状态估计误差耦合; RAKF 通过膨胀估计误差协方差可以补偿模型误差, 故在 50s~100s 之间模型不准时给出了误差较小的估计, 可是由于其依赖观测使得估计结果比较振荡, 尤其是在 100s 之后观测噪声方差变大的时段; 然而, 本文所提的算法在整个跟踪时段都给出了比其他算法更准确的估计。

表 1 列出了连续进行 100 次 Monte Carlo 仿真实验, 所有算法在不同的运动模式下的均方根误差 (Root Mean Squared Errors, RMSEs)。误差数据也表明了所提算法的有效性。

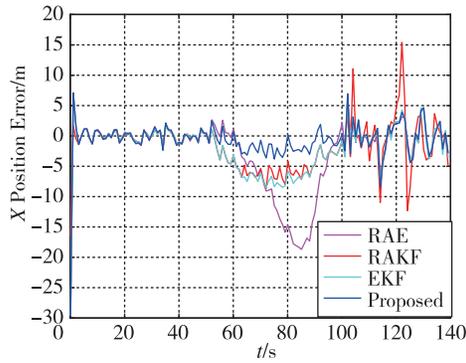


图5 X轴速度误差

Fig. 5 X-axis position errors

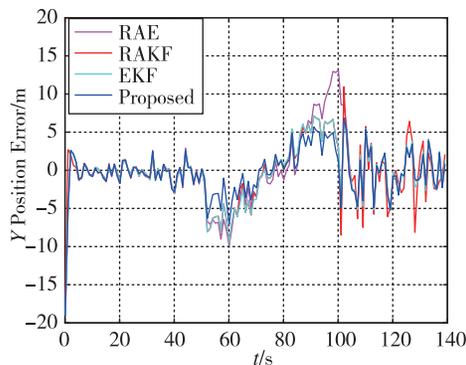


图6 Y轴位置误差

Fig. 6 Y-axis position errors

表1 位置估计的误差

Tab. 1 Average RMSEs of position estimation

对比算法	RAE	RAKF	EKF	PSOMD
直线运动/m	4.6859	6.1857	4.6417	4.5000
圆周运动/m	15.2291	9.6976	10.3830	3.5757

表2比较了几种算法的仿真时间。由表2可知,RAE和PSOMD比RAKF和EKF用时较长,这是因为这两种算法都采用了滑动开窗来估计当前时刻的观测噪声方差;而本文所提算法相较于RAE又用时稍长0.01s,这是因为PSOMD为了抑制滑动窗口样本不足的影响采用了衰减记忆的方法。

表2 仿真时间

Tab. 2 Simulation time

对比算法	RAE	RAKF	EKF	PSOMD
时间/s	0.2146	0.1349	0.0524	0.2249

针对目标做螺旋运动的轨迹,在相同的采样频率下进行了仿真实验。结果表明,PSOMD算法仍

能给出较准确的滤波结果。由于该算法是基于滑动窗口实现的,如果轨迹更为机动,可以通过提高采样频率来实现快速跟踪。

#### 4 结论

本文介绍了一种基于冗余伪观测的自适应卡尔曼滤波算法来估计观测噪声的方差,并且通过目标跟踪问题验证了该算法的有效性。对本文工作的总结如下:

1)通过构建伪测量将现有的SOMD算法推广到只具有单一测量的系统中,使其适用于更广泛的应用场景。

2)仿真结果表明,即使在采样频率较低时,所提算法仍能够准确反映测量系统的噪声特性,在准确性和鲁棒性方面优于其他参考算法。

3)所提算法对观测噪声方差矩阵的估计中包含了过程噪声方差矩阵。虽然当采样周期较小时,估计结果受状态估计误差的影响可以忽略,但仍受过程噪声方差的影响。只有过程噪声方差确切已知时才能准确地估算观测噪声方差,这使得该算法的应用受到了限制。因此,找到一种方法使过程噪声方差对观测噪声方差估计的影响也可以被忽略,值得进一步研究。

#### 参考文献

- [1] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems[J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.
  - [2] Karasalo M, Hu X. An optimization approach to adaptive Kalman filtering[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1785-1793.
  - [3] Jiang L, Zhang H. Redundant measurement-based second order mutual difference adaptive Kalman filter[J]. Automatica, 2019, 100: 396-402.
  - [4] Magill D T. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1965, 10(4): 434-439.
  - [5] Barshalom Y, Challa S, Blom H. IMM estimator versus optimal estimator for hybrid systems [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(3): 986-991.
  - [6] 赖际舟,柳敏,李志敏,等.基于有色噪声自回归建模的惯性/卫星交互多模型滤波导航算法[J].导航定位与授时,2015,2(6):19-24.
- Lai Jizhou, Liu Min, Li Zhimin, et al. Interacting

- multiple model filter algorithm of the inertial/GPS integrated system based on the colored noise regression modeling[J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2015, 2(6): 19-24(in Chinese).
- [7] Gadsden S A, Song Y, Habibi S. Novel model-based estimators for the purposes of fault detection and diagnosis[J]. *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, 2013, 18(4): 1237-1249.
- [8] Kim S, Choi J, Kim Y. Fault detection and diagnosis of aircraft actuators using fuzzy-tuning IMM filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2008, 44(3): 940-952.
- [9] Mohamed A H, Schwarz K P. Adaptive Kalman filtering for INS/GPS[J]. *Journal of Geodesy*, 1999, 3(4): 193-203.
- [10] Odelson B J, Rajamani M R, Rawlings J B. A new autocovariance least squares method for estimating noise covariances[J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 303-308.
- [11] Yang Y, Gao W. An optimal adaptive Kalman filter[J]. *Journal of Geodesy*, 2006, 80(4): 177-183.
- [12] 刘轶, 程旭红, 程建华. 基于改进强跟踪 ASCKF 算法的 SINS/GNSS 组合对准方法[J]. *导航定位与授时*, 2018, 5(5): 13-19.  
Liu Yi, Cheng Xuhong, Cheng Jianhua. SINS/GNSS integrated alignment method based on improved strong tracking ASCKF algorithm[J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2018, 5(5): 13-19 (in Chinese).
- [13] Ge B, Zhang H, Jiang L, et al. Adaptive unscented Kalman filter for target tracking with unknown time-varying noise covariance[J]. *Sensors*, 2019, 19(6): 1371.
- [14] Fitzgerald R J. Divergence of the Kalman filter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, 16(6): 736-747.
- [15] 张海, 常艳红, 车欢. 基于 GPS/INS 不同测量特性的自适应卡尔曼滤波算法[J]. *中国惯性技术学报*, 2010, 18(6): 696-701.  
Zhang Hai, Chang Yanhong, Che Huan. Measurement-based adaptive Kalman filtering algorithm for GPS/INS integrated navigation system[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2010, 18(6): 696-701 (in Chinese).
- [16] Zhou Q, Zhang H, Li Y, et al. An adaptive low-cost GNSS/MEMS-IMU tightly-coupled integration system with aiding measurement in a GNSS signal challenged environment[J]. *Sensors*, 2015, 15(9): 23953-23982.
- [17] Li Z, Zhang H, Zhou Q, et al. An adaptive low-cost INS/GNSS tightly-coupled integration architecture based on redundant measurement noise covariance estimation[J]. *Sensors*, 2017, 17(9): 2032.