

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2020.04.012

基于时间权函数的落角约束导引律中 剩余时间的估计方法

梁 勇¹, 张友安², 赵贺伟¹

(1. 海军航空大学岸防兵学院, 烟台 264001;
2. 烟台南山学院电气与电子工程系, 烟台 265713)

摘要:带导弹落角约束的导引律求解需要已知导弹飞行剩余时间。针对弯曲弹道,一般的剩余时间估计方法精度较低,在假设导弹速度一定的前提下,采用 n 阶多项式函数近似表示剩余路径,给出了一种基于近似闭环轨迹的实用剩余时间估计方法。仿真结果表明,剩余时间估计精度平均提高了13倍以上,且计算量可以满足实时性要求。

关键词:时间权函数;落角约束;导引律;剩余时间估计

中图分类号:V448.13 文献标志码:A 开放科学(资源服务)标识码(OSID):
文章编号:2095-8110(2020)04-0096-06



Time-to-go Estimation for Time-to-go Weighted Optimal Guidance with Impact Angle Constraints

LIANG Yong¹, ZHANG You-an², ZHAO He-wei¹

(1. Coast Defense Force College, Naval Aviation University, Yantai 264001, China;
2. Department of Electrical and Electronic Engineering, Yantai Nanshan University, Yantai 265713, China)

Abstract: The missile time-to-go is needed to solve the guidance law with the impact angle constraint. Because of the curved trajectory, the accuracy of the general time-to-go estimation is low. To solve the problem, a simple time-to-go estimation based on approximate closed-loop trajectory is proposed, in which the remaining path is approximately described by n -order polynomial function under the assumption of a certain missile speed. The simulation results show that the time-to-go estimation accuracy is increased by more than 13 times on average and the amount of computation can meet the real-time requirement.

Key words: Time-to-go weighted function; Impact angle constraint; Guidance law; Time-to-go estimation

0 引言

随着战场目标对抗手段日益多样,对导弹的攻击要求也逐步增多。导弹在命中目标时,不仅希望

获得最小脱靶量,还往往希望命中目标时导弹姿态最佳,以使战斗部发挥最大效能,取得最佳毁伤效果。在末制导约束中,通过线性二次最优控制理论可以得到满足落角和脱靶量约束的最优制导律^[1-4]。

收稿日期:2019-05-31;修订日期:2019-06-19

基金项目:国家自然科学基金(61273058)

作者简介:梁勇(1976-),男,博士,副教授,主要从事协同制导、组合导航方面的研究。E-mail: ytliangyong@sina.com

针对这一问题,不少文献开展了相关研究^[5-7]。针对垂直平面内的再入飞行器,文献[1]提出了一种控制落角约束的最优制导律;文献[2]提出了一种带落角约束的能量最优制导律设计;文献[3]提出了考虑终端速度约束的最优制导律,并且可以将速度约束直接转变成终端落角约束;文献[4]针对以不同的速度打击机动目标的情况研究了带落角控制的制导律,将该制导律与弹上预测目标位置跟踪器结合在一起;文献[5]和文献[6]针对任意阶常速导弹系统,得到了基于能量最优、落角约束的最优制导律的广义形式;文献[7]通过考虑与文献[2]一样的代价函数得到了一种最优制导律,并假设当前的加速度命令为剩余时间的线性形式,将零脱靶量和终端速度误差作为状态变量,通过将终端速度矫正到落角方向可以得到期望的终端落角;文献[8]针对落角和终端速度约束提出了最优制导律。上述制导律都是基于最优控制理论得到的,而文献[9]和文献[10]在比例导引律的基础上添加了控制落角约束的一个时变偏置项。对于静止目标,文献[11]的圆轨迹制导是偏置比例导引的另外一种形式,该制导律的主要思想是将导弹导引在导弹和目标之间的椭圆轨道上。尽管当 $N=3$ 时比例导引律情况下能量是最优的,但是考虑初始位置或者角度存在误差、目标机动等外界干扰和不确定性的情况,在实际中 $N>3$ 的情况是被应用于导弹系统中的^[12]。注意到比例导引律的制导增益是和导弹和目标的能量比例相关的^[13]。其他关于制导增益的解释可以参考文献[14]。

对于上述最优制导问题的闭环形式的解,需要知道准确的剩余时间^[15],但是剩余时间又不能通过任何的装置来测量。最优制导律的性能取决于剩余时间估计的准确度,因此,需要一个比较可行的剩余时间估计算法。由于落角控制的弹道轨迹是比较弯曲的,所以传统的估计剩余时间的方法(距离除以速度)会产生很大的误差,尤其是导弹在末制导段的初始时刻。针对上述问题,本文通过建立导弹实际轨迹近似模型,提出了一种实用的剩余时间计算方法。

1 落角约束最优制导律设计

针对静止或者缓慢移动的目标,图1所示为末制导段几何关系。其中, V_m 、 θ_m 和 θ_{mf} 分别表示导弹的速度、弹道倾角和期望的落角, a_m 是垂直于导

弹速度的法向加速度,通过控制输入 $u(t)$ 来实现。

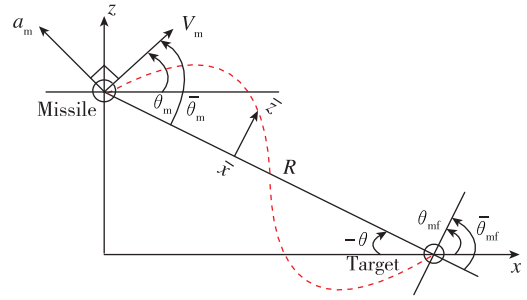


图1 规划航迹示意图

Fig. 1 Planned trajectory of the missile

如图1所示,导弹末制导阶段运动方程为

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= V_m \sin \theta_m(t), z(0) = z_0 \\ \dot{\theta}(t) &= \frac{a_m(t)}{V_m}, \theta_m(0) = \theta_{m0} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\dot{a}_m = \frac{1}{\tau} [u(t) - a_m(t)], a_m(0) = 0$$

在假定 V_m 是常量和 θ_m 小角度的情况下,可以线性化方程式(1)。

定义

$$v(t) = V_m \theta_m(t) \quad (2)$$

系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{x} = [z \quad v \quad a_m]^T, \mathbf{x}_0 = [z_0 \quad v_0 \quad 0]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \quad (5)$$

最优控制问题为,寻找控制变量 $u(t)$ 使得以下性能函数值最小

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^T(\tau) R(\tau) u(\tau) d\tau \quad (6)$$

并且满足方程

$$\mathbf{D}\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{E} \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} z_f \\ v_f \end{bmatrix} \quad (8)$$

$v_f = V_m \theta_{mf}$, t_f 代表飞行时间, R 是正的加权函数

$$R = \frac{1}{t_{go}^N}, N \geq 0 \quad (9)$$

剩余时间的定义为

$$t_{go} = t_f - t_0 \quad (10)$$

当 $N = 0$ 时,问题就变成了文献 [5] 中的纯能量最优控制问题。使用式(9)中的剩余时间加权函数,可以改变制导指令分布。对于 $N > 0$,当 $t \rightarrow t_f$ 时代价函数逐渐增大,所以当 $t = t_f$ 时控制最后变成 0。

通过对最优控制问题求解可以得到状态反馈解为

$$\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} (\mathbf{F}^T \mathbf{x}(t) - \mathbf{E}) \quad (11)$$

其中

$$\dot{\mathbf{F}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{F}, \mathbf{F}(t_f) = \mathbf{D}^T \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{F}, \mathbf{G}(t_f) = 0$$

将式(5)和式(8)式代入式(12),可得

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t_{go} & 1 \\ \tau t_{go} + \tau^2 e^{-\frac{t_{go}}{\tau}} - \tau^2 & \tau(1 - e^{-\frac{t_{go}}{\tau}}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

对于一个非负整数 N ,可以得到

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中

$$g_{11} = -\frac{\tau^2}{N+1} t_{go}^{N+1} + \frac{2\tau}{N+2} t_{go}^{N+2} - \frac{1}{N+3} t_{go}^{N+3} + 2\tau e^{-\frac{t_{go}}{\tau}} \left[\sum_{i=0}^{N+1} \frac{(N+1)!}{(N+1-i)!} \tau^{i+1} t_{go}^{N+1-i} - \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \tau^{i+2} t_{go}^{N-i} \right] + \tau^2 e^{-\frac{2t_{go}}{\tau}} \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{i+1} t_{go}^{N-i} - \tau^{N+3} N! \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{N+1} + 2N \right] \quad (15)$$

$$g_{12} = g_{21} = \frac{\tau}{N+1} t_{go}^{N+1} - \frac{1}{N+2} t_{go}^{N+2} + e^{-\frac{t_{go}}{\tau}} \left[2 \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \tau^{i+2} t_{go}^{N-i} - \sum_{i=0}^{N+1} \frac{(N+1)!}{(N+1-i)!} \tau^{i+1} t_{go}^{N+1-i} \right] - \tau e^{-\frac{2t_{go}}{\tau}} \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{i+1} t_{go}^{N-i} - \tau^{N+2} N! \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{N+1} + N - 1 \right] \quad (16)$$

$$g_{22} = -\frac{1}{N+1} t_{go}^{N+1} - \tau^{N+1} N! \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{N+1} - 2 \right] - 2e^{-\frac{t_{go}}{\tau}} \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \tau^{i+1} t_{go}^{N-i} + e^{-\frac{2t_{go}}{\tau}} \sum_{i=0}^N \frac{N!}{(N-i)!} \left(\frac{\tau}{2} \right)^{i+1} t_{go}^{N-i} \quad (17)$$

把式(15)和式(17)代入式(11)中,用 $V_m \theta_m$ 代替 $v(t)$ 。经过简化可以得到一阶惯性环节系统的带落角约束的最优制导律为

$$\mathbf{u}^* = \frac{t_{go}^N}{\tau(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21})} [A_1 z(t) + (A_1 t_{go} + A_2) V_m \theta_m(t) + (A_1 f_{31} + A_2 f_{32}) a_m(t) - A_1 z_f - A_2 V_m \theta_{mf}] \quad (18)$$

其中

$$A_1 = f_{31} g_{22} - f_{32} g_{21} \\ A_2 = f_{32} g_{11} - f_{31} g_{12} \quad (19)$$

如果导弹控制系统的响应时间较小或者飞行时间相对时间常数较大时,可忽略时间常数 τ 。在式(18)中,令 $\tau \rightarrow 0, z_f = 0$,那么无惯性环节控制系统的带落角约束的最优制导律(Optimal Guidance Law with Impact Angle Constraint, OGL/IAC-0)为

$$\mathbf{u}^* = -\frac{V_m}{t_{go}^2} \left[\frac{N_z}{V_m} z(t) + N_{\theta_m} t_{go} \theta_m(t) + N_{\theta_{mf}} t_{go} \theta_{mf} \right] \quad (20)$$

其中

$$N_z = (N+2)(N+3) \\ N_{\theta_m} = 2(N+2) \\ N_{\theta_{mf}} = (N+1)(N+2) \quad (21)$$

上述制导律需要已知 $z(t)$ 和 $\theta_m(t)$ 的值。可以通过测量导弹和目标的视线角信息 $\theta(t)$ 来计算 $z(t)$ 的值。此时, $\theta(t)$ 可以近似为

$$\theta(t) = -\sin^{-1} \frac{z}{R} \approx -\frac{z}{V_m t_{go}} \quad (22)$$

那么式(20)可以改写为

$$\mathbf{u}^* = -\frac{V_m}{t_{go}} [-N_z \theta(t) + N_{\theta_m} \theta_m(t) + N_{\theta_{mf}} \theta_{mf}] \quad (23)$$

实际中,对于 $N > 0$ 的情况,制导增益是可行的,因为当接近目标时制导指令是趋近于 0 的。这个特性很重要,因为它能保证抵抗外界干扰的不确定性、模型的不确定性和制导命令饱和限制。如果导弹的速度由于空气阻力而减少,那么可以通过选择一个较大的制导增益来避免性能的恶化。相反地,一个小的增益可以降低感应噪声的灵敏度。对于大多数的情况,理想的制导增益都是通过非线性仿真来选择。

2 剩余时间估计方法

针对上述制导律,最常用的也是最简单的剩余时间估计方法是用剩余距离除以导弹速度,即 $t_{go} = R/V_m$ 。这种方法在弹道弯曲时会产生较大误差。

为此,本文考虑将 OGL/IAC-0 的轨迹通过剩余路程的 N 阶多项式函数来近似。

由图 1 可知,在视线坐标系中, t 时刻导弹的轨迹坐标为 \bar{x} 和 \bar{z} ,其中 $\bar{\theta}_m = \theta_m + \theta$, $\bar{\theta}_{mf} = \theta_{mf} + \theta$ 。

假设 \bar{z} 表示为 \bar{x} 的 $(N+3)$ 阶多项式为

$$\bar{z}(x) = a_{N+3}\bar{x}^{N+3} + a_{N+2}\bar{x}^{N+2} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0, \quad N=0,1,2,\cdots \quad (24)$$

对于小角度 $\bar{\theta}_m$ 来说, \bar{x} 可以被 $V_m t_{go}$ 所代替,由式(3)可得

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_m(\bar{x}) &= \frac{\dot{\bar{z}}}{V_m} = \frac{\dot{\bar{x}}}{V_m} \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \\ &\approx -[(N+3)a_{N+3}\bar{x}^{N+2} + (N+2)a_{N+2}\bar{x}^{N+1} + \cdots + a_2\bar{x} + a_1](\dot{\bar{x}} \approx -V_m) \end{aligned} \quad (25)$$

为了求解式(24)和式(25)中的系数,需要 $N+4$ 个边界条件。当 $N=0$ 时,由文献[5]可知,存在 4 个边界条件,包括 t 和 t_f 时刻的位置和飞行路径角

$$\begin{aligned} \bar{z} &= 0, & \bar{x} &= R \\ \bar{\theta}_m &= \bar{\theta}_m(t), & \bar{x} &= R \\ \bar{z} &= 0, & \bar{x} &= 0 \\ \bar{\theta}_m &= \bar{\theta}_{mf}, & \bar{x} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

当 $N > 1$ 时,需要 N 个额外条件,可以给定 $t = t_f$ 时刻的加速度条件为

$$\left[\frac{d^{N+1}u^*(t)}{(dt)^{N+1}} \right] = 0 \Rightarrow \left[\frac{d^N \bar{\theta}_m}{(d\bar{x})^N} \right]_{x=0} \approx 0 \quad (27)$$

由于 V_m 为常值, t_{go} 可以通过路径的长度除以导弹的速度得到

$$\begin{aligned} t_{go} &= \frac{1}{V_m} \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right)^2} d\bar{x} \\ &\approx \frac{R}{V_m} (1+k) \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)表示的剩余时间可以理解为距离除以速度再乘以由于路径的弯曲而导致长度增加的一个补偿项。在以下给定的近似条件下

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right)^2 \quad (29)$$

对于每个 N 值可得到 k 的值为

$$k = \begin{cases} \frac{(2\bar{\theta}_m^2(t) - \bar{\theta}_{mf}\bar{\theta}_m(t) + 2\bar{\theta}_{mf}^2)}{30}, & N=0 \\ \frac{(3\bar{\theta}_m^2(t) - 2\bar{\theta}_{mf}\bar{\theta}_m(t) + 12\bar{\theta}_{mf}^2)}{70}, & N=1 \\ \frac{(4\bar{\theta}_m^2(t) - 3\bar{\theta}_{mf}\bar{\theta}_m(t) + 36\bar{\theta}_{mf}^2)}{126}, & N=2 \end{cases} \quad (30)$$

本文介绍的剩余时间估计不需要超出执行制

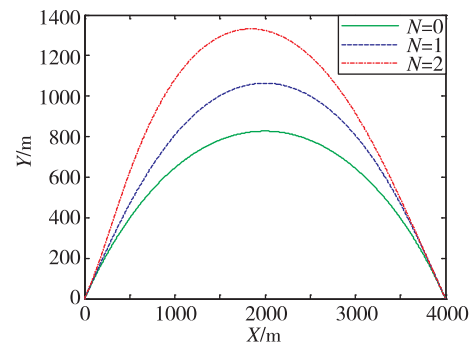
导律需要的测量信息。注意到在末制导段的初始弹道中,当 $|\theta_{m0}| = \frac{\pi}{2}$ 时,所提出的剩余时间计算方法会产生很大的误差,原因是 $\left| \frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} \right| \ll 1$ 是不成立的,但是随着导弹接近目标, $\bar{\theta}_m$ 和 $\bar{\theta}_{mf}$ 相等,剩余时间估计误差会慢慢变小,最后为 0。

3 仿真结果

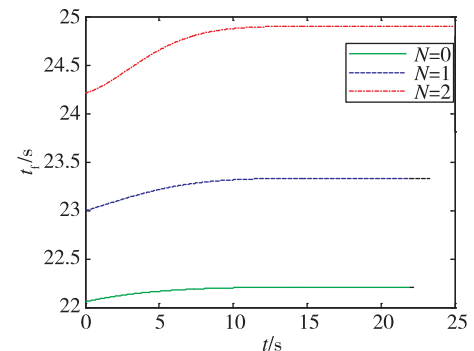
仿真条件如下:导弹初始位置为 $(0, 2000)$ m,目标位置为 $(1200, 0)$ m,导弹速度为 $V_M = 200$ m/s,初始弹道倾角 $\theta_M(0) = 0^\circ$,期望的落角 θ_f 分别取 $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ 。

图 2 和图 3 所示分别为 $\theta_{m0} = 60^\circ, \theta_{mf} = -60^\circ$ 和 $\theta_{m0} = 90^\circ, \theta_{mf} = -90^\circ$ 时的仿真结果。注意到在 $\theta_{m0} = 90^\circ$ 时,初始段会产生大的 t_f 估计误差,是因为在这种情况下 $|d\bar{z}/d\bar{x}|$ 是小值近似的假设不成立,随着时间推移,估计误差逐渐减小。

表 1 所示为采用传统方法和本文方法对导弹剩余时间进行估计的相对误差。由表 1 中可知,相对于传统的剩余时间计算方法 $t_{go} = R/V_m$,本文提出的剩余时间估计方法对所有的 N 都有很高的精度。



(a) 弹道轨迹



(b) 剩余时间估计

图 2 $\theta_{m0} = 60^\circ, \theta_{mf} = -60^\circ$ 时仿真结果

Fig. 2 Simulation results under $\theta_{m0} = 60^\circ, \theta_{mf} = -60^\circ$

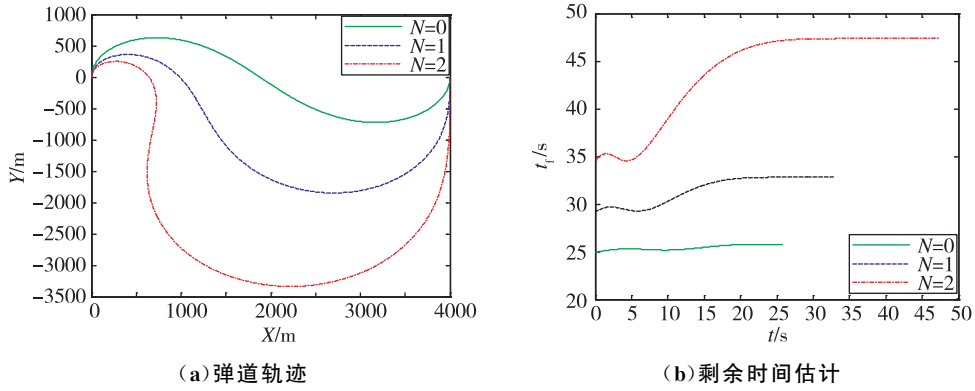


图3 $\theta_{m0} = 90^\circ, \theta_{mf} = -90^\circ$ 时仿真结果

Fig. 3 Simulation results under $\theta_{m0} = 90^\circ, \theta_{mf} = -90^\circ$

表1 导弹剩余时间估计相对误差 $\Delta t_{r_{max}}/t_r(\%)$

Tab. 1 Fractional error of time-to-go estimation

$\theta_{m0}/(^{\circ})$	$\theta_{mf}/(^{\circ})$	R/V_m			本文方法		
		$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=1$	$N=2$	$N=3$
90	90	-21.30	-39.21	-59.25	-3.28	-11.13	-26.52
-90	90	-31.86	-46.37	-63.66	-8.94	-18.32	-34.41
60	60	-10.24	-19.00	-29.44	-0.72	-2.44	-5.93
-60	60	-16.20	-23.63	-32.85	-2.07	-4.29	-8.20
30	30	-2.69	-5.00	-7.87	-0.05	-0.16	-0.40
-30	30	-4.43	-6.46	-9.05	-0.14	-0.30	-0.57

4 结论

本文采用最优控制理论设计了考虑落角约束的闭环制导律,针对所需的剩余时间估计问题,基于导弹飞行近似轨迹,提出了一种实用的剩余时间估计算法。仿真结果表明,该方法相对于传统的估计方法,在不同的落角约束和制导增益条件下,相对精度平均提高了13倍以上。

参考文献

[1] Kim M, Grider K V. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1973, AES-9(6): 852-859.

[2] Cho H. Navigation constants in PNG law and the associated optimal control problems[C]// Proceedings of Korea Automatic Control Conference. Seoul, Korea, 1992: 578-583.

[3] Ben-Asher J Z, Yaesh I. Advances in missile guidance theory[M]. Reston, VA: AIAA, 1998, 180: 25-35.

[4] Song T L, Shin S J, Cho H. Impact angle control for

planar engagements[J] IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(4): 1439-1444.

[5] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Closed-form solutions of optimal guidance with terminal impact angle constraint[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications. Istanbul, Turkey, 2003: 504-509.

[6] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2005, 28(4): 724-732.

[7] Ohlmeyer E J. Control of terminal engagement geometry using generalized vector explicit guidance[C]// Proceedings of American Control Conference. Denver, CO, 2003: 396-401.

[8] Lee Y I, Ryoo C K, Kim E. Optimal guidance with constraints on impact angle and terminal acceleration [C]// Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Austin, TX, 2003.

[9] Kim B S, Lee J G, Han H S. Biased PNG law for impact with angular constraint[J]. IEEE Transactions on

- Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1): 277-288.
- [10] Kim K S, Kim Y. Design of generalized conceptual guidance law using aim angle[J]. Control Engineering Practice, 2004, 12(3): 291-298.
- [11] Felio D A, Duggan D S. Lecture note on autonomous vehicle guidance, control, and simulation[M]. San Diego, CA, 2000.
- [12] Lin C F. Modern navigation, guidance, and control processing[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1991: 360-371.
- [13] Anderson G M. Comparisons of optimal control and differential game intercept missile guidance laws[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1981, 14(2): 1056-1058.
- [14] Kreindler E. Optimality of proportional navigation [J]. AIAA Journal, 1973, 11(6): 878-880.
- [15] 王健, 刘远帆, 史震. 攻击时间约束下的三维制导律 [J]. 导航定位与授时, 2015, 2(6): 12-18.
Wang Jian, Liu Yuanfan, Shi Zhen. Three-dimensional guidance law with impact time constraint[J]. Navigation Positioning and Timing, 2015, 2(6): 12-18(in Chinese).