doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2022.03.018

基于线性位移模式的环形谐振子理论研究

裴永乐[1],高立民[1],徐 亮[1],李 华[1],李晓辉[1],李录贤[2]

(1.中国科学院西安光学精密机械研究所,西安 710119;
2.西安交通大学航天航空学院,机械结构强度与振动国家重点实验室,
飞行器环境与控制陕西省重点实验室,西安 710049)

摘　要:环形谐振子理论是谐振陀螺研究领域的重要内容,然而在目前经典环形谐振子理论中,仍存在很多问题尚未解决,例如:挠度控制方程不能精确求解环形结构的弯曲问题,获得的二阶弯曲角频率及进动系数理论解不能充分反映出其随尺寸参数(如高度 h、曲率半径 r 等)变化的影响规律等。为了克服上述不足,从环形结构理论的基本假设和基本条件出发,基于环形结构的线性位移模式假设、虚功原理和哈密顿原理,建立新的环形谐振子理论,包括广义本构关系、平衡方程和边界条件等,获得环形结构静态弯曲问题的解析求解方法和动态问题的理论解。最后,针对典型的环形结构静、动态问题,通过与其他理论结果进行对比,验证了理论和求解方法的正确性。工作表明,进动系数不是恒定的,其值会随着结构尺寸的不同在0.4附近很小范围内发生变化。

关键词:环形谐振子;哈密顿原理;弯曲问题;进动系数;二阶弯曲角频率

中图分类号:U666.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2095-8110(2022)03-0140-08

Theoretical Research on Ring-Shaped Harmonic Oscillator Based on Linear Displacement Mode

PEI Yong-le[1], GAO Li-min[1], XU Liang[1], LI Hua[1], LI Xiao-hui[1], LI Lu-xian[2]

(1. Xi'an Institute of Optics and Precision Mechanics, CAS, Xi'an 710119, China;
2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Shaanxi Key Laboratory of Environment and Control for Flight Vehicle, School of Aerospace Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The theory of ring-shaped harmonic oscillators is an important part for the research on resonant gyroscopes. However, as for the current classical theory, there are still many defects, for example, the deflection governing equation cannot accurately handle bending problems, and solutions of the bending angular frequency and precession coefficient cannot reflect the influence of structure dimension parameters (e.g. height h and curvature radius r). In order to overcome the above shortcomings, this paper establishes a new theory for ring-shaped resonators, including generalized constitutive relations, equilibrium equations and boundary conditions, based on the basic assumptions and conditions, the linear displacement mode, the virtual work principle and the Hamilton's principle for ring-shaped structures. And then the analytical solution method is built for static bending problems while the theoretical solution is proposed for dynamic problems. Finally, as for typical static and dynamic problems, the new theory and the solutions are verified by comparing the results with those from other theories. This paper indicates that the precession co-

收稿日期:2021-10-18;**修订日期**:2021-11-06

作者简介:裴永乐(1988-),男,博士,助理研究员,主要从事惯性器件结构方面的研究。

efficient is not constant, which will vary around 0.4 within a small range for different structural dimensions.

Key words: Ring-shaped harmonic oscillator; Hamiltonian principle; Bending problem; Precession coefficient; Second-order bending angular frequency

0 引言

谐振陀螺又称为固体波动陀螺，是一种利用谐振子的驻波进动效应测量基座旋转的无转子式陀螺仪[1]。由于其结构简单、精度高、体积小、能耗小、工作温度范围大等显著优点，被广泛应用于航空、航天、航海、地面定位等领域[2-3]。经典的谐振陀螺主要包括谐振子、基座以及激励组件等部件（有些也可将基座与激励组件整合在一起），如图 1 所示[4]。其中，谐振子是谐振陀螺的敏感部件，也是谐振陀螺的核心部件，通常情况下，谐振子有两种典型结构类型：简化环型和旋转薄壳型（如半球谐振子[4]、钟形谐振子[5]等）。由于环形谐振子与旋转薄壳型谐振子具有相同的四波腹振型和相似的动力学特性，可以用环形谐振子的模型来简化研究半球谐振子唇缘的动态特性[6-7]。

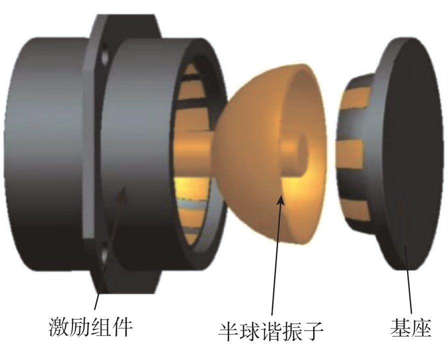


图 1　谐振陀螺结构示意图

Fig. 1　Schematic of resonant gyro structures

经典的环形谐振子理论是基于弹性力学理论以及几何中性轴（或称中心线）不可拉伸假设建立的（见式（1）之二式）[8]。如图 2 所示，对于环形结构，建立极坐标系 $o^*-r\theta$，r 和 L 分别为环形结构几何中心线（中性轴）的曲率半径和特征长度，挠度 $w(\theta,t)$ 的控制方程及相关约束条件为

$$\begin{cases}\ddot{w}_{,\theta\theta}-\ddot{w}+4\Omega\dot{w}_{,\theta}+\bar{\kappa}^2(w_{,\theta\theta\theta\theta\theta\theta}+\\ \quad 2w_{,\theta\theta\theta\theta}+w_{,\theta\theta})=0\\ u_{\theta,\theta}=-w\\ \bar{\kappa}^2=E_0h^2/(12\rho_0r^4)\end{cases}\tag{1}$$

其中，“ $\dot{}$ ”表示物理量对时间 t 的一阶偏导数；Ω、E_0、ρ_0 和 h 分别表示环形谐振子结构的转动角速度、弹性模量、密度和高度。利用式（1），可进一步获得环形谐振子在缓慢、匀速转动过程中的动态响应（即在忽略转动角速度的平方项和角速度的变化项影响的条件下），包括进动系数 $\bar{K}$ 和二阶振动角频率 $\bar{\omega}_2$[6]，即

$$\begin{cases}\bar{K}=2/5\\ \bar{\omega}_2=\sqrt{\dfrac{3}{5}\dfrac{E_0h^2}{\rho_0r^4}}\end{cases}\tag{2}$$

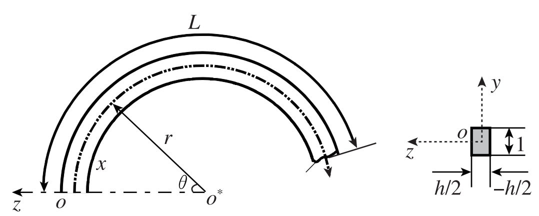


图 2　环形结构及坐标系示意图

Fig. 2　The ring-shaped structure and its coordinate system

然而，在目前经典环形谐振子理论中，仍存在许多不足之处：1）经典理论对应的挠度控制方程式不能精确描述环形结构的静态弯曲问题；2）对于动态响应问题，基于经典理论获得的理论解式（2）不能精确反映结构特征尺寸（如高度 h、曲率半径 r 等）对动态响应的影响规律（特别是进动系数和二阶振动角频率）；3）经典理论也未充分考虑环形结构上、下表面剪应力自由条件。

因此，为了克服上述不足，本文从环形结构的基本假设和基本条件出发，系统地开展环形谐振子结构静、动态问题的理论研究。

1　环形结构问题的数学描述

根据文献[9-10]，建立坐标系 $o\text{-}xyz$，如图 2 所示。对于一个环形结构问题，可近似看成是一个平面应力问题。因而，三维弹性理论中 6 个应力分量减少到 3 个（即 σ_x、σ_z 和 τ_{xz}）；3 个独立的位移分量减少到 2 个（即 u_x 和 u_z）。对于环结构问题，通常还进一步采用如下 2 个广义位移定义以及基本概念。

1.1 广义位移的定义

本文选取挠度 $w(x,t)$ 及周向伸长 $\bar{u}(x,t)$ 的定义为

$$\begin{cases}w(x,t)=\dfrac{1}{B_0}\displaystyle\int_A E_0\cdot u_z(x,z,t)\mathrm{d}A\\ \bar{u}(x,t)=\dfrac{1}{B_0}\displaystyle\int_A E_0\cdot u_x(x,z,t)\mathrm{d}A\end{cases}\tag{3}$$

其中,A 表示环横截面的面积;B_0 为环截面的拉伸刚度,其含义为

$$B_0=\int_A E_0\mathrm{d}A=\int_A E_0 1\mathrm{d}z=E_0 h\neq 0\tag{4}$$

1.2 基本概念和基本假设

对于环结构问题,通常还进一步采用如下 2 个基本假设和 1 个基本条件[9-10]。

基本假设 1:径向正应力 σ_z 相对 σ_x 和 τ_{xz} 较小,因而在环结构中忽略不计(即 $\sigma_z=0$);其余 2 个应力与应变之间满足退化的胡克(Hooke)定律,即

$$\begin{cases}\sigma_x=E_0\varepsilon_x\\ \tau_{xz}=G_0\gamma_{xz}\end{cases}\tag{5}$$

其中,ε_x 和 γ_{xz} 分别为截面上的正应变和剪应变;E_0 及 G_0 分别表示材料的弹性模量和剪切模量,进而几何关系可以表示为[9-10]

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{\partial u_x}{\partial x}+\dfrac{u_z}{r}\\ \gamma_{xz}=\dfrac{\partial u_z}{\partial x}+\dfrac{\partial u_x}{\partial z}-\dfrac{\bar{u}}{r}\end{cases}\tag{6}$$

基本假设 2:径向正应变恒等于零,即

$$\varepsilon_z=0\tag{7}$$

其含义为

$$\partial u_z/\partial z=0\tag{8}$$

式(8)表明,径向位移 u_z 只是 x 的函数,不随着高度坐标 z 发生变化。

基本条件 1:上、下表面剪应力自由条件。

根据基本假设 1 中式之二式,剪应力自由条件等价于

$$\gamma_{xz}(x,\pm h/2,t)=0\tag{9}$$

1.3 位移模式及本构关系

对于环形结构,假设其位移模式为以下线性形式

$$\begin{cases}u_x(x,z,t)=\bar{u}(x,t)+\\ \qquad\qquad z\left(\dfrac{\bar{u}(x,t)}{r}-w'(x,t)\right)\\ u_z(x,z,t)=w(x,t)\end{cases}\tag{10}$$

其中,“$'$”表示物理量对周向坐标 x 的一阶偏导数。显然,上述位移模式满足式(9)(即上、下表面剪应力自由条件)。将式(10)代入几何关系式(6)可得

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\bar{u}'+z\left(\dfrac{\bar{u}'}{r}-w''\right)+\dfrac{w}{r}\\ \gamma_{xz}=0\end{cases}\tag{11}$$

对于环结构问题,其广义应力的定义如下

$$\begin{cases}N=\displaystyle\int_A 1\cdot\sigma_x\mathrm{d}A\\ M=\displaystyle\int_A z\cdot\sigma_x\mathrm{d}A\end{cases}\tag{12}$$

其中,N 和 M 分别为周向拉力和弯矩。

根据本构关系式(5)和几何关系式(11),可得环结构的广义本构关系为

$$\begin{cases}N=B_0\bar{\varepsilon}\\ M=B_2\kappa\end{cases}\tag{13}$$

并且

$$\begin{cases}\kappa=\dfrac{\bar{u}'}{r}-w''\\ \bar{\varepsilon}=\bar{u}'+\dfrac{w}{r}\\ B_2=\displaystyle\int_A E_0 z^2\mathrm{d}A=E_0h^3/12\neq 0\end{cases}\tag{14}$$

其中,$\bar{\varepsilon}$ 为与周向拉力 N 对应的广义拉伸应变,κ 为与弯矩 M 对应的广义弯曲应变,B_2 为弯曲刚度。

2 环形结构的静态弯曲问题

弯曲问题是环形结构静力学的基本问题,目前已有许多学者进行了系统的研究,但是仍然没有获得精度很高、形式简单的解析解。因此,这一节重点研究圆环结构的静态弯曲问题。

2.1 静态弯曲问题的基本理论

根据环结构的虚功原理,可得

$$\begin{aligned}0&=\delta U+\delta V\\ &=\int_0^L[M\delta\kappa+N\delta\bar{\varepsilon}]\mathrm{d}x-\int_0^L q_w(x)\cdot\delta w(x)\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{15}$$

其中,$q_w(x)$ 为几何中心线上的载荷分布函数。

经部分积分,并按照独立变分量 $\delta\bar{u}$ 和 δw 分别整理,得到平衡方程为

$$\begin{cases}\delta\bar{u}:N'+M'/r=0\\ \delta w:M''-N/r+q_w(x)=0\end{cases}\tag{16}$$

将式(13)和式(14)代入式(16),平衡方程为

$$\begin{cases}B_0(\bar{u}''+w'/r)+B_2(\bar{u}''/r^2-w'''/r)=0\\ B_2(\bar{u}'''/r-w^{(4)})-B_0(\bar{u}'/r+\\ \quad w/r^2)+q_w(x)=0\end{cases}\tag{17}$$

相应的边界条件为

自然边界条件　　本质边界条件

$$\begin{cases}\left(\dfrac{M}{r}+N\right)\Big|_{x=x_0}=\dfrac{M_0}{r}+N_0 & \text{or} \quad \bar{u}\,|_{x=x_0}=\bar{u}_0 \\ M\,|_{x=x_0}=M_0 & \text{or} \quad w'\,|_{x=x_0}=w' \\ M'\,|_{x=x_0}=M'_0 & \text{or} \quad w\,|_{x=x_0}=w_0\end{cases} \tag{18}$$

当对于整个圆环结构进行分析时，取 $L=2\pi r$，此外，还需要充分考虑环结构的连续性条件（或周期性条件），从而保证计算结果的准确性。从环结构的物理意义上讲，环结构的连续性条件可表述为

$$\begin{cases}\bar{u}^{(m)}(0)=\bar{u}^{(m)}(2\pi r) \\ w^{(n)}(0)=w^{(n)}(2\pi r)\end{cases} \tag{19}$$

其中，$m=0$ 且 $n=1$，即广义位移 $\bar{u}$ 连续，广义位移 w 一阶导数连续。

2.2 静态弯曲问题的理论解

对于环结构弯曲问题，根据式（13）、式（14）和式（16），有

$$N''+N/r^2=q_w(x)/r \tag{20}$$

即

$$\left(\bar{u}'+\frac{w}{r}\right)''+\left(\bar{u}'+\frac{w}{r}\right)/r^2=q_w(x)/(B_0 r) \tag{21}$$

解式（21），得 $\bar{u}'+w/r$ 的通解为

$$\left(\bar{u}'+\frac{w}{r}\right)=C_1\sin\left(\frac{x}{r}\right)+C_2\cos\left(\frac{x}{r}\right)+S_1^*(x) \tag{22}$$

其中，$S_1^*(x)$ 为常微分方程式（21）的特解；C_1 和 C_2 为待求系数。

根据式（16）中第一式，可得

$$\left(\frac{\bar{u}''}{r}-w'''\right)=-\frac{rB_0}{B_2}\left(\bar{u}''+\frac{w'}{r}\right) \tag{23}$$

根据式（22）和式（23），消去变量 $w(x)$ 可得

$$\begin{aligned}\bar{u}^{(4)}+\frac{\bar{u}''}{r^2}=&-\left(\frac{C_1}{r^3}+\frac{B_0C_1}{B_2r}\right)\cos\left(\frac{x}{r}\right)+\\&\left[S_1^{*\prime\prime\prime}-\frac{B_0}{B_2}S_1^{*\prime}\right]+\\&\left(\frac{C_2}{r^3}+\frac{B_0C_2}{B_2r}\right)\sin\left(\frac{x}{r}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

取 $t(x)=\bar{u}''(x)$，式（24）可转化为

$$\begin{aligned}t''(x)+\frac{t(x)}{r^2}=&-\left(\frac{C_1}{r^3}+\frac{B_0C_1}{B_2r}\right)\cos\left(\frac{x}{r}\right)+\\&[S_1^{*\prime\prime\prime}-\frac{B_0}{B_2}S_1^{*\prime}]+\left(\frac{C_2}{r^3}+\frac{B_0C_2}{B_2r}\right)\sin\left(\frac{x}{r}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

求解式（24），可得

$$\begin{aligned}\bar{u}(x)=&\iiint\left[C_3\cos\left(\frac{x}{r}\right)+C_4\sin\left(\frac{x}{r}\right)+S_2^*(x)\right]\cdot\\&\mathrm{d}x\mathrm{d}x+C_5x+C_6\end{aligned} \tag{26}$$

其中，$S_2^*(x)$ 为常微分方程式（25）的特解；C_3、C_4、C_5 和 C_6 为待求系数。

根据式（22）和式（26），可得挠度 $w(x)$ 的分布为

$$\begin{aligned}w(x)=r\Bigg[&C_1\sin\left(\frac{x}{r}\right)+C_2\cos\left(\frac{x}{r}\right)+S_1^*(x)-\\&\int\left[C_3\cos\left(\frac{x}{r}\right)+C_4\sin\left(\frac{x}{r}\right)+S_2^*(x)\right]\mathrm{d}x-C_5\Bigg]\end{aligned} \tag{27}$$

根据式(26)及式(27)可知，对于静态弯曲问题，本文理论中有 6 个边界条件可唯一确定上述 6 个待求系数，因此环结构弯曲问题从数学意义上讲是完备的。

3 环形结构的动态问题

环形谐振子结构的动态响应问题（如驻波进动效应、振动频率等问题）[11-12]，一直是谐振陀螺领域的重要研究内容。因此，本节基于上述广义几何关系、本构关系及哈密顿原理，对环形结构的动态响应问题进行系统的研究。

3.1 动态问题的基本理论

对于缓慢、匀速转动过程中的环形谐振子结构，根据环结构的哈密顿原理，可得

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_1}^{t_2}(\delta U+\delta V-\delta K)\mathrm{d}t\\&=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L[M\delta\kappa+N\delta\epsilon]\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\\&\quad\int_0^L q_w(x,t)\cdot\delta w(x)\mathrm{d}x-\\&\quad\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L[\rho_0 v_\parallel\delta v_\parallel+\rho_0 v_\perp\delta v_\perp]\mathrm{d}x\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\begin{cases}v_\perp=-\dot{w}+\Omega u_x \\ v_\parallel=\dot{u}_x+\Omega(R+w)\end{cases} \tag{29}$$

并且，$v_\parallel$ 和 $v_\perp$ 分别代表环结构中心轴处的周向速度和径向速度。

经部分积分，并忽略 Ω^2 和 $\dot{\Omega}$ 项的影响[1]，按照独立变分量 $\delta\bar{u}$ 和 δw 分别整理，可得

$$\begin{cases}\delta\bar{u}: N'+M'/r=m_{11}\ddot{\bar{u}}+\\ \quad 2m_{11}\Omega\dot{w}+\dfrac{m_{22}}{r}\left(\dfrac{\ddot{\bar{u}}}{r}-\ddot{w}'\right)\\ \delta w: M''-N/r+q_w(x,t)=m_{11}\ddot{w}-\\ \quad 2m_{11}\Omega\dot{\bar{u}}+m_{22}\left(\dfrac{\ddot{\bar{u}}'}{r}-\ddot{w}''\right)\end{cases} \tag{30}$$

其中

$$\begin{cases} m_{11}=\rho_0 h \\ m_{22}=\rho_0 h^3/12 \end{cases} \tag{31}$$

至此，建立了环形结构动态问题的控制方程，这对于求解环形谐振子的动态响应问题具有重要的指导作用。此外，环形结构的连续性(周期性)条件可一般地表述为

$$\begin{cases} \bar{u}^{(m)}(0,t)=\bar{u}^{(m)}(2\pi r,t) \\ w^{(n)}(0,t)=w^{(n)}(2\pi r,t) \end{cases}(m=0,n=1) \tag{32}$$

3.2　动态问题的理论解

二阶(角)频率及进动系数是谐振陀螺的重要动态响应参数，因此需要重点研究。为了获得环形结构的动态响应问题的理论解，同样引入几何中性轴(或称中心线)不可拉伸假设，考虑式(10)和式(1)之二式，从而有

$$\bar{\varepsilon}=\bar{u}'+w/r\equiv 0 \tag{33}$$

即

$$\bar{u}'=-w/r \tag{34}$$

根据布勃诺夫-伽辽金法，取 $q_w(x,t)=0$，假设挠度 w 和周向伸长 $\bar{u}$ 的二阶振型分布为

$$\begin{cases} w(x,t)=p(t)\sin\left(\dfrac{2x}{r}\right)+q(t)\cos\left(\dfrac{2x}{r}\right) \\ \bar{u}(x,t)=\dfrac{p(t)}{2}\cos\left(\dfrac{2x}{r}\right)-\dfrac{q(t)}{2}\sin\left(\dfrac{2x}{r}\right) \end{cases} \tag{35}$$

其中，$p(t)$ 和 $q(t)$ 为分布函数，并且该分布自动满足周期性条件(见式(32))。

将式(33)和式(35)代入平衡方程式(30)，利用布勃诺夫-伽辽金法整理可得

$$\begin{cases} a_2 p\ddot{w}(t)-2\Omega a_1\dot{q}(t)+a_0 p(t)=0 \\ a_2 q\ddot{w}(t)+2\Omega a_1\dot{p}(t)+a_0 q(t)=0 \end{cases} \tag{36}$$

其中

$$\begin{cases} a_2=\dfrac{5m_{11}\pi}{2}+\dfrac{9m_{22}\pi}{2r^2} \\ a_1=2m_{11}\pi \\ a_0=\dfrac{18B_2\pi}{r^4} \end{cases} \tag{37}$$

进而，进动系数 K 和二阶角频率 ω_2 的理论解为

$$\begin{cases} K=\dfrac{a_1}{2a_2}=\dfrac{\dfrac{2}{5}}{1+\dfrac{3h^2}{20r^2}} \\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}\dfrac{E_0h^2}{\rho_0 r^4}\dfrac{1}{1+\dfrac{3h^2}{20r^2}}} \end{cases} \tag{38}$$

4　典型问题的求解与分析

为了减少谐振子在工作过程中的能量损耗，环形谐振子往往选用熔融石英材料[13]，其相关力学参数如下[14]：密度 $\rho_0=2200\mathrm{kg/m^3}$，弹性模量 $E_0=76.7\mathrm{GPa}$ 及泊松比 $\nu=0.17$。基于该材料的力学属性，本文对环形谐振子的静态弯曲问题和动态响应问题进行了求解与分析。

4.1　弯曲问题求解及分析

为了验证本文环问题的基本理论和解析求解方法的正确性，本小节对两端(即 $x=0$ 及 $x=\pi r$ 处)受简支条件约束、均布载荷 $q_w(x)=q_0$ 作用的环形结构弯曲问题进行分析。考虑上述弯曲问题的对称性，本文取二分之一圆环结构进行分析(即 $L=\pi r$)，如图 3 所示。根据式(18)，上述弯曲问题的边界条件可进一步描述为

$$\begin{cases} \bar{u}(0)=0 \\ M(0)=0 \\ w(0)=0 \end{cases} \text{and} \begin{cases} \bar{u}(\pi r)=0 \\ M(\pi r)=0 \\ w(\pi r)=0 \end{cases} \tag{39}$$

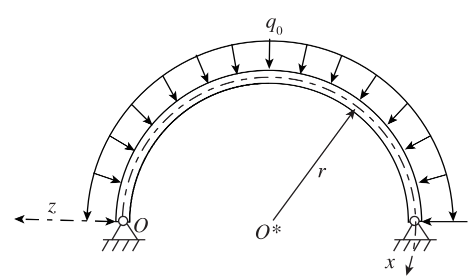
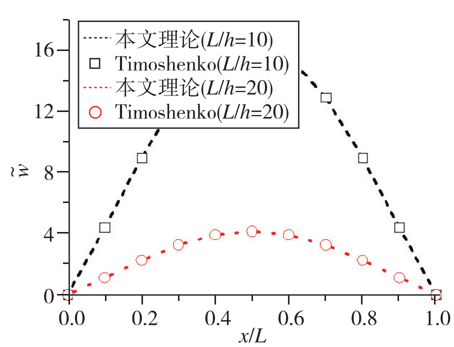


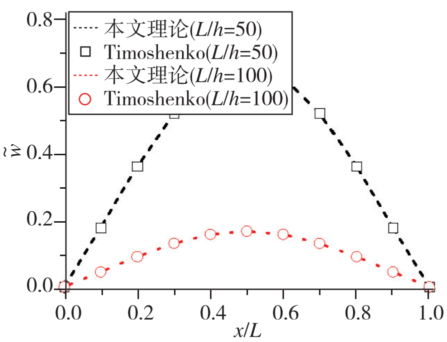
图 3　环形结构受均布载荷示意图

Fig. 3　Schematic of the ring-shaped structure under a uniform load

根据 2.2 节的解析求解方法，可获得挠度 $\tilde{w}(x)$ 沿 x 方向(周向)的分布情况，并使用 $q_0L^4/(10^4E_0h^3)$ 进行无量纲化，如图 4 所示。此外，为了验证本文理论



(a) 当 $L/h=10$ 及 $L/h=20$ 时



(b) 当 $L/h=50$ 及 $L/h=100$ 时

图 4　无量纲挠度沿轴向分布

Fig. 4　The distribution of dimensionless deflection along x direction

及求解方法的正确性，还引入了基于 Timshenko 理论[10]的曲梁结构弯曲问题的挠度分布(剪切修正系数 $K_S=5/6$)进行对比。

根据图 4 可知，对于上述弯曲问题，随着长高比 L/h 的增加，挠度的最大值在不断减小，这是由于 L/h 的增加，引起了整体结构刚度不断减小的缘故。与此同时，在长高比 L/h 分别为 10、20、50 和 100 的工况下，本文理论获得解析解与 Timshenko 理论的解在整个区域内一致性十分好，并且具有良好的对称性，这些都充分证实了本文环形结构理论和解析求解方法的准确性。

令人遗憾的是，经典环形谐振子理论是不能求解静态弯曲问题的。根据经典环形谐振子的挠度控制方程式(1)，挠度控制方程可简化为

$$w_{,\theta\theta\theta\theta\theta\theta}+2w_{,\theta\theta\theta\theta}+w_{,\theta\theta}=0 \tag{40}$$

显然，上述挠度控制方程无法充分反映结构特征尺寸 h、r 以及材料属性 E_0 对环形结构弯曲问题的影响。事实上，造成这一问题的根本原因在于，没有厘清经典环形谐振子理论的基本条件(和假设)与理论求解的简化条件(几何中心线不可拉伸假设)之间的区别。在经典环形谐振子理论建立时，过早地将几何中心线不可拉伸假设作为约束条件引入；从数学意义上讲，该假设条件只是为获取理论解而引入的一个简化求解条件，并非是环形谐振子理论建立的基本假设(或条件)。

为克服经典理论不能求解环结构弯曲问题的不足，本文从环结构的基本假设和基本条件出发，根据虚功原理(或哈密顿原理)，建立了环结构弯曲问题的基本理论，获得的平衡方程可以精确求解环结构的弯曲问题，见式(17)或式(30)左侧项。因此，从这一方面来说，本文的环形谐振子理论具有更广泛的适用性。

4.2　动态响应求解及分析

根据式(2)和式(38)，对比了本文理论和经典谐振子理论的二阶角频率计算结果，并使用 $\sqrt{3E_0h^2/(5\rho_0r^4)}$ 进行无量纲化，如图 5 所示。此外，为了验证本文理论的正确性，使用有限元分析软件 Abaqus 求解不同高径比 h/r 条件下的环形结构二阶弯曲频率，使用 $\sqrt{3E_0h^2/(20\pi^2\rho_0r^4)}$ 进行无量纲化，最终获得无量纲二阶弯曲角频率，如图 5 所示。

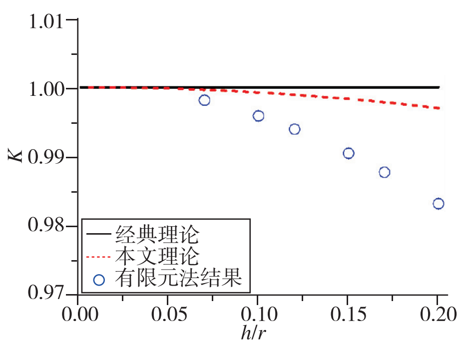


图 5　二阶角频率 ω_2 随 h/r 的变化规律

Fig. 5　The variation of the second-order angular frequency ω_2 with h/r

根据图 5 可知，对于二阶无量纲弯曲角频率 ω_2，利用经典环形谐振子理论获得的计算结果为恒定值，而基于本文理论的计算结果不再为恒值，并且随着 h/r 的增大，对应的无量纲频率在一定的小范围内不断减小，在 $h/r=0.2$ 时频率值降低了约 0.3%，这也是基于本文理论首次获得的结果。此外，与有限元结果相比，尽管本文理论与经典理论的结果都会有一定偏差，这主要是因为本文理论与经典理论都忽略了环结构横向剪切效应所致；但是，相较于经典理论的结果，基于本文理论的解更接近于有限元分析的结果(最大相对误差小于 1.4%)，这也证实了本文的计算结果具有更高的准确性。

另一方面，本文还研究了环形谐振子进动系数的分布规律。根据式(2)和式(38)，可获得进动系数随 h/r 的变化规律，如图 6 所示。同样地，与经典环形谐振子理论的计算结果不同，本文获得的进动系数值不再恒为 0.4，而是随着 h/r 的增大，对应的进动系数在一定的小范围内不断减小，当 $h/r=0.2$ 时，进动系数值降低了约 0.5%(降低至 0.398)，这

也是本文研究的另一重要理论结果。

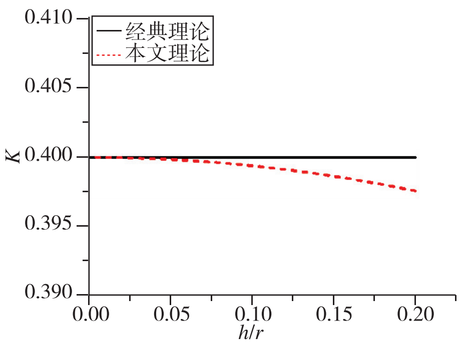


图 6 进动系数 K 随 h/r 的变化规律

Fig. 6 The distribution of the precession coefficient K with h/r

事实上,对于环形结构的动态响应问题(即二阶角频率和进动系数),对比了经典理论与本文新理论计算结果之间的差异,根据式(2)和式(38),建立两种理论解之间的联系如下

$$\begin{cases} \omega_2 = \bar{\omega}_2 \sqrt{\dfrac{1}{1+3h^2/(20r^2)}} \\ K = \dfrac{\bar{K}}{1+3h^2/(20r^2)} \end{cases} \tag{41}$$

通过分析环结构动力学方程中各项在求解过程中的作用,发现造成上述结果差异(即二阶弯曲角频率和进动系数)的直接原因是由于动态平衡方程式(30)中的 $\dfrac{m_{22}}{r}\left(\dfrac{\ddot{u}}{r}-\ddot{w}'\right)$ 项和 $m_{22}\left(\dfrac{\ddot{u}'}{r}-\ddot{w}''\right)$ 项的共同作用所致。若进一步考虑广义几何关系中弯曲应变的物理内涵 $\kappa=\bar{u}'/r-w''$ 及环结构哈密顿原理的具体形式,造成上述差异的根本原因从物理意义上讲是因为经典环形谐振子理论无法精确描述环结构弯曲变形的动能量;另一方面,从数学内涵上讲,广义弯曲应变的引入是为了满足上、下表面剪应力自由条件,因此,上、下表面剪应力自由条件在环结构理论研究时必须引起足够的重视。

5 结论

本文从经典环形谐振子理论出发,揭示了经典理论中的不足。然后,基于环结构问题研究的基本假设和基本条件(即上、下表面剪应力自由条件),根据线性位移模式假设、广义位移的定义、几何关系和本构关系,获得了环结构的广义本构关系,利用虚功原理和哈密顿原理,建立了新的环结构理论,包括平衡方程、边界条件、连续性条件等。同时,推导了典型环结构弯曲问题的解析求解方法及动态问题的理论解。最后,针对典型的环形结构静、动态问题,利用本文的新理论及求解方法,通过与其他理论及有限元法的结果进行对比,证明了本文的环形谐振子理论和求解方法的准确性,并剖析了经典谐振子理论中缺陷产生的原因。

本文得出的主要结论如下:

1)本文获得的环形谐振子结构的相关理论及求解方法,不仅可以求解动态响应问题,还可以求解静态弯曲问题;

2)本文获得的环形谐振子结构的二阶弯曲角频率理论解,不仅形式简单,而且更接近有限元分析结果;

3)环形谐振子的进动系数事实上不是恒定的,其值会随着结构尺寸的差异在 0.4 附近很小范围内变化,并且进动系数的大小与材料的力学属性(如弹性模量、密度及泊松比)无关。

此外,本文的环形谐振子理论对于高精度谐振陀螺的设计及模型误差分析(如品质因数不均匀、供电电压不稳等因素引入的误差)等研究,具有重要的工程意义和学术价值。

参考文献

[1] 刘付成,赵万良,宋丽君.半球谐振陀螺惯性敏感器及其空间应用[M]. 北京:中国宇航出版社,2019.
Liu Fucheng, Zhao Wanliang, Song Lijun. The inertial sensor of hemispherical resonant gyros and its application in space[M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2019(in Chinese).

[2] 徐海刚,潘兴旺,邱丽玲,等.半球谐振陀螺惯性系统设计探讨[J]. 导航定位与授时,2019,6(6):14-18.
Xu Haigang, Pan Xingwang, Qiu Liling, et al. Research on inertial system design of hemispheric resonant gyro[J]. Navigation Positioning and Timing, 2019, 6(6): 14-18(in Chinese).

[3] Peshekhonov V G. The outlook for gyroscopy[J]. Gyroscopy and Navigation, 2020, 11(3): 193-197.

[4] 伊国兴,魏振楠,王常虹,等.半球谐振陀螺控制及补偿技术[J]. 宇航学报,2020,41(6):780-789.
Yi Guoxing, Wei Zhennan, Wang Changhong, et al. Hemispherical resonator gyro control and compensation technology[J]. Journal of Astronautics, 2020, 41(6): 780-789(in Chinese).

[5] 刘宁.钟形振子式角速率陀螺研究[D]. 北京:北京理工大学,2016.

Liu Ning. The study of bell-shaped vibratory gyro[D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016(in Chinese).

[6] 方针，刘书海，余波．半球谐振陀螺的基础理论研究[J]. 导航定位与授时，2017，4(2)：72-78.
Fang Zhen, Liu Shuhai, Yu Bo. Study of basic theories of hemispherical resonator gyros[J]. Navigation Positioning and Timing, 2017, 4(2): 72-78(in Chinese).

[7] 明坤．半球谐振陀螺频率裂解机理与平衡方法研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2019.
Ming Kun. Frequency splitting mechanism analysis and balance method for the hemispherical resonator gyroscope [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019(in Chinese).

[8] Matveev B A，Lipatnikov B H，Alekin A B，等．固体波动陀螺[M]. 北京：国防工业出版社，2009.
Matveev B A, Lipatnikov B H, Alekin A B, et al. Solid state wave gyroscopes[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2009(in Chinese).

[9] Sayyad A S, Ghugal Y M. A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams[J]. Composite Structures, 2019, 226: 111246.

[10] Pei Y L, Li L X. A simplified theory of FG curved beams [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, 85: 104126.

[11] 严隆辉，江黎，蒋春桥，等．力反馈模式半球谐振陀螺幅度控制方法优化[J]. 压电与声光，2020，42(2)：197-199.
Yan Longhui, Jiang Li, Jiang Chunqiao, et al. Optimization of amplitude control method of hemispherical resonator gyroscopes under force to rebalance mode[J]. Piezoelectrics and Acoustooptics, 2020, 42(2): 197-199(in Chinese).

[12] 徐泽远，伊国兴，魏振楠，等．一种半球谐振陀螺谐振子动力学建模方法[J]. 航空学报，2018，39(3)：134-144.
Xu Zeyuan, Yi Guoxing, Wei Zhennan, et al. A dynamic modeling method for resonator of hemispherical resonator gyro[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(3): 134-144(in Chinese).

[13] 徐志强，刘建梅，王振，等．石英半球谐振子精密加工技术探讨[J]. 导航与控制，2019，18(2)：69-76.
Xu Zhiqiang, Liu Jianmei, Wang Zhen, et al. Discussion on precision machining technology of quartz hemispherical harmonic oscillator [J]. Navigation and Control, 2019, 18(2): 69-76(in Chinese).

[14] 沈博昌，伊国兴，任顺清，等．半球谐振陀螺仪谐振子振动特性的有限元分析[J]. 中国惯性技术学报，2004，12(6)：56-60.
Shen Bochang, Yi Guoxing, Ren Shunqing, et al. Finite element analysis on resonator's characteristics of HRG[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2004, 12(6): 56-60(in Chinese).

（编辑：孟彬）