

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2022.05.011

# 无人飞行器集群仅测距初始相对位姿确定方法研究

丁鑫<sup>1</sup>, 龚柏春<sup>1</sup>, 管叙军<sup>2</sup>, 郝明瑞<sup>2</sup>

- (1. 南京航空航天大学航天学院, 南京 210016;  
2. 复杂系统控制与智能协同技术重点实验室, 北京 100074)

**摘要:**针对全球导航卫星系统(GNSS)拒止环境下无人飞行器集群成员间的相对定位问题,研究了一种基于机载惯性测量单元(IMU)、气压高度计与数据链测距组合的初始相对位姿求解算法。首先,在高度计稳定输出较为精确的高度信息的前提下,将飞行器的三维运动解耦成二维水平运动,给出了三维加速度和角速度、测距信息的水平坐标系投影等效模型。在此基础上,以待求量相对位置和航向角的非线性形式构造了新的待求状态量,并将相对位置和航向角的非线性求解问题转化成了新状态量的线性模型最小二乘求解问题。然后,通过引入递推最小二乘算法(RLS),建立了该相对位姿求解算法的实时输出递推形式,有效降低了机载在线计算的负载。接着,对所提算法进行了可观测性分析,并给出了使系统状态量不可观测的几种相对运动形式。最后,对所提算法进行了数值仿真实验,仿真结果表明,该算法能够有效、快速求解初始相对位姿,位置误差在初始相对距离的10%以内,航向角误差在初始相对角度的1%以内。

**关键词:**相对导航;仅测距;相对位置估计;递推最小二乘

**中图分类号:**V448.2      **文献标志码:**A      **文章编号:**2095-8110(2022)05-0100-11

## Research on Determining Initial Relative Pose of Unmanned Aerial Vehicles Using a Range-Only Method

DING Xin<sup>1</sup>, GONG Bai-chun<sup>1</sup>, GUAN Xu-jun<sup>2</sup>, HAO Ming-rui<sup>2</sup>

- (1. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;  
2. Science and Technology on Complex System Control and Intelligent Agent Cooperation Laboratory, Beijing 100074, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of relative localization among members of unmanned air vehicles (UAVs) under global navigation satellite system (GNSS) denied environment, an initial relative pose estimation algorithm based on the combination of on-board inertial measurement unit (IMU), barometric altimeter and data link ranging is studied. Firstly, under the circumstances that the barometric altimeter stably outputs relatively accurate altitude information, the three-dimensional motion of UAV is decoupled into two-dimensional horizontal motion, and the equivalent model of the horizontal coordinate system projection of the three-dimensional acceleration, angular velocity, and ranging information is given. Secondly, based on the horizontal coordinate system, a new state quantity to be obtained is constructed containing relative position and heading angle in a non-linear form, and the nonlinear solution problem of relative position and heading angle is transformed into the linear least squares (LS) problem of the new state quantity. Thirdly, the real-time

收稿日期:2021-11-12;修订日期:2022-03-22

基金项目:装备预研重点实验室基金(6142210200306)资助课题

作者简介:丁鑫(1998-),男,硕士研究生,主要研究方向为飞行器集群导航技术。

通信作者:龚柏春(1987-),男,博士,硕士生导师,主要研究方向为空间态势感知、飞行器集群导航与控制技术。

output of the relative pose solving algorithm is established in recursive form by introducing the recursive least squares algorithm (RLS), which effectively reduces the load of real-time on-board computing. Then, the observability analysis of the proposed algorithm is performed, and several forms of relative motion between UAVs that make the state quantity of the system unobservable are given. Finally, numerical simulations of the proposed algorithm are performed. The simulation results show that the proposed algorithm can effectively and quickly solve the initial relative pose estimation problem. The position and heading error are within 10% and 1% of the initial relative distance and heading, respectively.

**Key words:** Relative navigation; Range-only measurement; Relative position estimation; Recursive least square

## 0 引言

当前,无人飞行器通过集群协同的方式执行任务的应用越来越广泛,例如协同侦察<sup>[1]</sup>、森林火灾探测<sup>[2]</sup>及危险环境中执行搜救<sup>[3]</sup>等。相较于单个高价值、多载荷的无人飞行器,集群无人飞行器具有雷达截面小、成本低、数量多、容错率高等特点,能够通过群体协同效应实现单个大型飞行器难以完成或者代价太大的任务。

实现集群成员间的高精度相对定位是保障集群任务的关键前提。传统的集群飞行器常使用独立于集群外的、提供公共参考坐标的外部定位系统实现成员间相对定位,如运动捕捉系统<sup>[4]</sup>(Motion Capture System, MCS)和全球导航卫星系统<sup>[5-6]</sup>(Global Navigation Satellite System, GNSS)。但 MCS 需要预先布置于环境中,无法应用于未知环境,GNSS 导航信号在复杂环境中存在衰减、多路径效应、无信号甚至信号欺骗等问题<sup>[7]</sup>。因此,GNSS 拒止环境下无人飞行器集群的自主相对导航已经成为行业内的热点问题。

M. Kriegleder 等研究了基于无人飞行器的仅测角机载红外传感系统<sup>[8]</sup>,由于红外传感器视野范围有限,需要在不同方向布置机载传感器阵列,以实现目标飞行器始终处于测量视野范围内<sup>[9]</sup>。也有学者研究了基于视觉相机的相对定位系统<sup>[10]</sup>,但基于视觉的定位系统需要测量飞行器对目标飞行器进行追踪机动<sup>[11]</sup>,以保证目标处于观测视野内,且当目标飞行器距离较远时,视觉相机存在特征识别点模糊等问题,一定程度上限制了无人飞行器间的相对飞行距离。

机载无线电设备能够实现全方位通信测距,且相邻设备间的通信几乎不受空间环境的影响,近年

来受到了领域内研究人员的广泛关注。通过在环境中布置多个超宽带(Ultra-Wideband, UWB)固定锚点,可以实现对无人飞行器的测距定位<sup>[12]</sup>。也有学者研究了基于机载蓝牙传感器,无固定测距锚点的相对定位算法<sup>[13]</sup>,该算法需要集群成员交换地理北及速度信息。Guo K. 等利用单架悬停的无人飞行器作为 UWB 通信测距锚点,实现集群成员间的相对定位<sup>[14]</sup>,这种方法仍然需要地理北及速度信息,且集群成员的初始定位需要单架无人飞行器悬停才能启动。S. Helm 等研究了一种基于蓝牙通信测距,并使用光流法测速辅助的相对定位算法<sup>[15]</sup>,但光流法测速只适用于低速飞行和光线良好的任务场景,因此该方法对飞行速度及环境条件均有一定限制。F. M. Martel 等研究了 UWB 测距和视觉即时定位与地图构建(Simultaneous Localization and Mapping, SLAM)组合的相对定位算法<sup>[16]</sup>,该算法通过最少 6 次通信测距求解 2 台设备的 4 自由度相对位姿,视觉 SLAM 装置用于测量每台设备相对于各自位置原点的位移,但其同样只适用于低速环境,且对机载计算资源有较高要求。T. M. Nguyen 等通过在无人飞行器及追踪目标上分别安装 2 个 UWB 天线,同时使用光流法测速,实现了无人飞行器对移动目标的相对定位<sup>[17]</sup>,但受限于双天线的安装距离,只能实现较近距离的相对定位。

因此,为了解决上述问题,实现 GNSS 拒止环境下无人飞行器集群成员间的自主相对导航,本文研究了一种基于机载惯性测量单元(Inertial Measurement Unit, IMU)、气压高度计与数据链测距组合的相对位姿求解算法。在建立飞行器三维运动的水平坐标系投影等效模型的基础上,求解状态量相对位置及航向角的线性最小二乘问题。通过引入递推最小二乘算法(Recursive Least Squares,

RLS),实现了相对位姿估计的实时输出,并给出了使系统状态量不可观测的几种飞行形式。仿真结果表明,该算法能够有效降低机载计算负载,并快速稳定地求解无人飞行器间的初始相对位姿。

下面首先建立二维坐标系下的相对位姿求解算法,然后引入该算法的递推求解形式,再对所提算法的可观测性进行理论分析,最后进行数值仿真实验和结果分析。

## 1 仅测距初始相对位姿确定算法

### 1.1 运动解耦与水平坐标系定义

无人飞行器在空间坐标系下相对惯性系包含位置及姿态信息,其中姿态角由俯仰角 $\theta$ 、滚转角 $\phi$ 及偏航角 $\gamma$ 组成。当其携带气压高度计时,高度方向的位置信息可直接获得,此时可以将各无人飞行器的空间位置及姿态投影至与其固连的当地水平坐标系 $\{h_i\}$ 下,该坐标系原点位于质心, $Z$ 轴指向天, $X$ 和 $Y$ 轴位于水平面内, $Y$ 轴指向飞行器的线速度方向, $X$ 轴方向由右手法则确定。 $Y$ 轴与地理北的夹角定义为航向角,偏西向为正。此时 $\{h_i\}$ 系的等效偏航角速率 $\omega_i$ 为

$$\omega_i = \frac{\sin(\phi_i) \dot{\gamma}_i}{\cos(\theta_i)} + \frac{\cos(\phi_i) \dot{\gamma}_i}{\cos(\theta_i)} \omega_i \quad (1)$$

其中, $\dot{\gamma}_i$ 和 $\dot{\omega}_i$ 表示本体系下飞行器俯仰角速率和偏航角速率; $\phi_i$ 和 $\theta_i$ 表示飞行器的滚转角及俯仰角。

令无人飞行器本体系下的加速度为 $S_i$ , $\{h_i\}$ 系的加速度为 $a_i$ ,则有如下关系式成立

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\phi_i) & 0 & \sin(\phi_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi_i) & 0 & \cos(\phi_i) \end{bmatrix} S_i \quad (2)$$

$a_i$ 在水平面内的投影为 $a'_i$ ,则有

$$a'_i = \begin{bmatrix} \cos(\phi_i) & 0 & \sin(\phi_i) \\ \sin(\theta_i)\sin(\phi_i) & \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\phi_i) \end{bmatrix} S_i \quad (3)$$

此时,无人飞行器在空间中的运动已解耦为:角速度为 $\omega_i$ 、加速度为 $a'_i$ 的二维平面运动和高度方向的竖直运动,因而可将三维空间下无人飞行器的相对位姿求解问题简化为二维平面下的相对航向角及相对位置求解问题。

令无人飞行器间的空间距离为 $D_i$ ,高度差为 $\Delta h_i$ ,则无人飞行器在二维平面下的距离 $d_i$ 可通过式(4)求出

$$d_i = \sqrt{D_i^2 - (\Delta h_i)^2} \quad (4)$$

其中, $D_i$ 由机载通信数据链通过TOA(Time of Arrival)模式测量得到; $\Delta h_i$ 由2个飞行器的机载气压高度计测量的高度作差得到。

之后建立2个无人飞行器在同一平面下的相对位置及坐标系,如图1所示。图1中, ${}^{h_i}p_i^{h_j}$ 表示飞行器 $j$ 在其初始坐标系 $\{h_j\}$ 下测量的第 $i$ 个点的位置,并将其表示在 $\{h_i\}$ 坐标系下。 ${}^{h_i}p_i^{h_i}$ 可简化表示为 $p_i^{h_i}$ 。飞行器每隔一定时间间隔进行一次测距,分别以第一次测距时2个飞行器的姿态为各自飞行器的测量坐标系原点,可以得到对应的位置 $p_i^{h_1}$ 及 $p_i^{h_2}$ 。

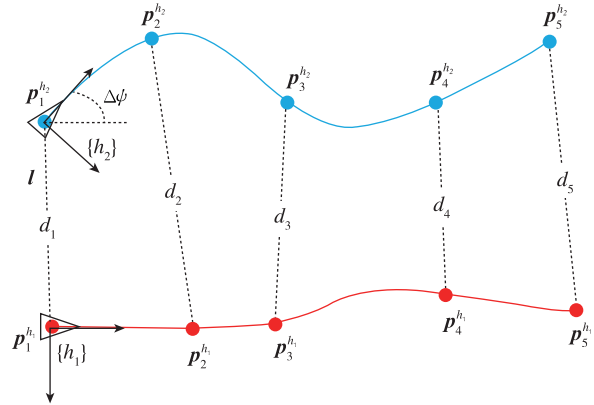


图1 坐标系定义与测距示意图

Fig. 1 Coordinate system definition and UAV ranging diagram

无人飞行器的坐标及相对位置如表1所示。表1中, $C_{h_2}^{h_1}$ 表示由坐标系 $\{h_2\}$ 到坐标系 $\{h_1\}$ 的坐标变换矩阵; $l$ 表示由 $\{h_1\}$ 系到 $\{h_2\}$ 系的位移,表示在 $\{h_1\}$ 系下。

表1 向量表示

Tab. 1 Vector notation

向量/坐标	X轴	Y轴
$p_i^{h_1}$	$A_i$	$B_i$
$p_i^{h_2}$	$x_i$	$y_i$
${}^{h_1}p_i^{h_2} = C_{h_2}^{h_1} p_i^{h_2} + l$	$X_i$	$Y_i$
$l$	$u$	$v$

### 1.2 建立相对定位算法

利用文献[16]中的方法,2个飞行器测距时满

足如下方程

$$\begin{aligned} d_i^2 &= \|\mathbf{p}_i^{h_1} - \mathbf{p}_i^{h_2}\|^2 \\ &= (A_i - X_i)^2 + (B_i - Y_i)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

且  $X_i$  和  $Y_i$  满足如下表达式

$$X_i = x_i \cos \Delta \psi - y_i \sin \Delta \psi + u \quad (6)$$

$$Y_i = x_i \sin \Delta \psi + y_i \cos \Delta \psi + v \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(5)后,整理可得

$$\begin{aligned} b_i &= -2A_i u - 2B_i v + (-2A_i x_i - 2B_i y_i) \cos \Delta \psi + \\ & (2A_i y_i - 2B_i x_i) \sin \Delta \psi + 2x_i L_1 + 2y_i L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$b_i = d_i^2 - A_i^2 - B_i^2 - x_i^2 - y_i^2 \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{n \times 7} = \begin{bmatrix} -2A_1 & -2B_1 & -2A_1 x_1 - 2B_1 y_1 & 2A_1 y_1 - 2B_1 x_1 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ -2A_2 & -2B_2 & -2A_2 x_2 - 2B_2 y_2 & 2A_2 y_2 - 2B_2 x_2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2A_n & -2B_n & -2A_n x_n - 2B_n y_n & 2A_n y_n - 2B_n x_n & 2x_n & 2y_n & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{B}_{n \times 1} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \quad (14)$$

由式(13)和式(14)可知,矩阵  $\mathbf{M}_{n \times 7}$  和  $\mathbf{B}_{n \times 1}$  中的元素均为已知量,将式(11)中  $\mathbf{B}_{n \times 1}$  移至等号左边,并构造新的矩阵  $\mathbf{H}_{n \times 8} = [\mathbf{M} \quad -\mathbf{B}]$ , 因此式(11)可进一步表示为

$$\mathbf{H}_{n \times 8} \hat{\mathbf{x}}_{8 \times 1} = 0 \quad (15)$$

式中

$$\hat{\mathbf{x}}_{8 \times 1} = [u \quad v \quad \cos \Delta \psi \quad \sin \Delta \psi \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad 1]^T \quad (16)$$

当  $n=5$  时,  $\text{rank}(\mathbf{H})=5$ , 由秩-零化度定理可知,矩阵  $\mathbf{H}$  的核空间为 3, 因此式(15)矩阵方程的解可表示为  $\mathbf{H}$  矩阵的极大线性无关组  $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$  的线性组合

$$\hat{\mathbf{x}}_{8 \times 1} = \lambda_1 \mathbf{r} + \lambda_2 \mathbf{s} + \mathbf{t} \quad (17)$$

式中,  $\lambda_1, \lambda_2$  为待求解系数。

由式(16)可知,解向量  $\hat{\mathbf{x}}$  中的变量满足式(10)及式(18)所示的等式约束关系式

$$\begin{cases} \cos^2 \Delta \psi + \sin^2 \Delta \psi = 1 \\ L_1^2 + L_2^2 = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (18)$$

利用文献[18]中的方法,将解向量  $\hat{\mathbf{x}}$  满足的以上 5 个约束等式构建为关于  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{15} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ \cdots & & & \cdots & \cdots \\ \alpha_{51} & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{cases} L_1 = u \cos \Delta \psi + v \sin \Delta \psi \\ L_2 = v \cos \Delta \psi - u \sin \Delta \psi \\ L_3 = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (10)$$

当 2 个飞行器进行  $n$  次通信测距时,则可获得  $n$  个如式(8)所示的方程,将由这  $n$  个方程构成的方程组整理成如下矩阵形式

$$\mathbf{M}_{n \times 7} \mathbf{x}_{7 \times 1} = \mathbf{B}_{n \times 1} \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{x}_{7 \times 1}$  为包含相对位置及航向角的待求解未知量;  $\mathbf{M}_{n \times 7}$  为系数矩阵;  $\mathbf{B}_{n \times 1}$  为包含测量信息的列向量。  $\mathbf{x}_{7 \times 1}, \mathbf{M}_{n \times 7}$  和  $\mathbf{B}_{n \times 1}$  的具体表示如下

$$\mathbf{x}_{7 \times 1} = [u \quad v \quad \cos \Delta \psi \quad \sin \Delta \psi \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T \quad (12)$$

其中,方程组中的元素  $\alpha_{ij}$  及  $\beta_i$  为极大线性无关组  $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$  中各元素线性组合导出的已知量。求解该矩阵方程,即可解出  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ 。将  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  代入式(17),进而求出未知量  $\hat{\mathbf{x}}$ , 即可得到坐标系  $\{h_2\}$  相对于坐标系  $\{h_1\}$  的位置  $(u, v)$  及航向角  $\Delta \psi$ 。

当  $n \geq 6$  时,利用最小二乘算法(Least Squares, LS),可直接求得式(11)中未知量的近似解

$$\hat{\mathbf{x}}_{7 \times 1} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{B} \quad (20)$$

利用上述方法最少利用 5 次航向角、加速度信息和测距数据,即可求解 2 个飞行器间的相对位置和航向角的估计值。

## 2 RLS

从理论上讲,仅利用 5 次通信测距和对应时刻的加速度测量信息就可以求解出初始相对位姿,但由于数据链测距存在随机误差,IMU 的陀螺仪和加速度计测量值也有常值误差和随机误差,那么利用  $\mathbf{H}$  矩阵中 5 行 7 列元素间的约束关系进行位姿解算会存在较大误差,求解得到的极大线性无关组  $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}$  波动较大,最终导致算法求解结果误差波动较大。而利用多次通信测距数据构建 LS(式(11)中  $n \geq 7$ ),可以避免求解矩阵的极大线性无关组,同时利用多次测量数据逼近未知量的真值,降低了单次测量数据对算法求解影响的权重。同时,为了尽可能节省飞行器机载运算资源,这里采用递推算法进行

相对位姿的实时求解及输出。

当有  $n \geq 7$  次测量数据时,式(11)中的  $M$  矩阵及列向量  $B_{n \times 1}$  可以表示为

$$\begin{cases} M_{n \times 7} = [m_1^T & m_2^T & \dots & m_n^T]^T \\ B_{n \times 1} = [b_1 & b_2 & \dots & b_n]^T \end{cases} \quad (21)$$

式中,  $m_n$  为  $M$  矩阵的第  $n$  行数据,且  $m_n$  是维数为  $1 \times 7$  的行向量。

令  $t_{n-1}$  时刻的状态估计量为  $\hat{x}_{n-1}$ ,则  $t_n$  时刻的估计量  $\hat{x}_n$  可由  $\hat{x}_{n-1}$  进行递推修正得到,即

$$\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + k_n [b_n - m_n \cdot \hat{x}_{n-1}] \quad (22)$$

其中,  $k_n$  是修正增益,是维数为  $7 \times 1$  的列向量。具体地,仅测距初始位姿确定的 RLS 计算公式如下

$$\begin{cases} k_n = P_{n-1} m_n^T (1 + m_n^T P_{n-1} m_n)^{-1} \\ \hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + k_n [b_n - m_n \cdot \hat{x}_{n-1}] \\ P_n = [I - k_n m_n] P_{n-1} \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $P_{n-1}$  及  $\hat{x}_{n-1}$  为该算法的递推估计初值,在得到初值后即可开始递推运算。递推估计初值的生成方法为

$$\begin{cases} P_{n-1} = (M_{n-1}^T M_{n-1})^{-1} \\ \hat{x}_{n-1} = P_{n-1} M_{n-1}^T B_{n-1} \end{cases} \quad (24)$$

式中,估计初值由前 20 次通信测距生成,即生成估计初值时  $n = 21$ 。选取前 20 次测量数据生成初值的原因将在数值仿真 4.2.1 节中进行详细说明,当  $n$  达到总测距次数  $N$  时,递推算法结束运行。

RLS 利用  $t_n$  时刻的测量数据对  $t_{n-1}$  时刻的状态估计值进行修正,进而得到  $t_n$  时刻的状态估计值。具体地,递推过程中每次测量生成的数据列  $m_i$  和  $b_i$  及递推算法的运算流程分别如图 2 及图 3 所示。

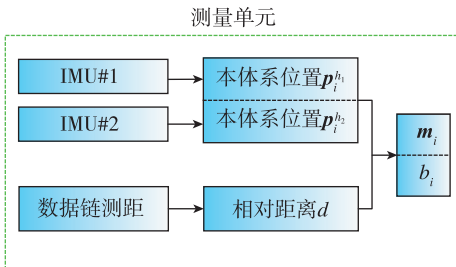


图 2 测量数据列流程图

Fig. 2 Flow chart of measurement column

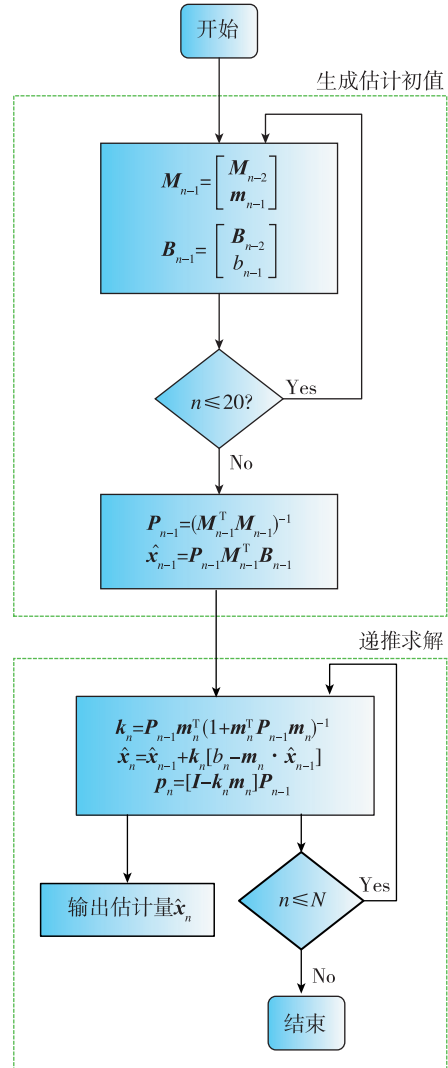


图 3 递推算法流程图

Fig. 3 Flow chart of RLS algorithm

### 3 状态可观测性分析

理论上讲,如果通过单次或多次的测量值作为输入,能够确定出唯一的系统状态量(物理可行解),那么这个系统就是可观测的。与完备测量系统不同,本文研究的欠测量系统的状态可观测性是变化的,会受到相对运动的约束,因此有必要对系统进行状态可观测性分析,给出使系统状态不可观测的相对运动形式,用于指导飞行实践。下面就根据上文中提出的拟合求解方法对系统状态可观测性进行分析。

当测距次数为 5 次时,将矩阵方程式(11)生成的  $M$  矩阵展开

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2A_1 & -2B_1 & -2A_1x_1 - 2B_1y_1 & 2A_1y_1 - 2B_1x_1 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ -2A_2 & -2B_2 & -2A_2x_2 - 2B_2y_2 & 2A_2y_2 - 2B_2x_2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ -2A_3 & -2B_3 & -2A_3x_3 - 2B_3y_3 & 2A_3y_3 - 2B_3x_3 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ -2A_4 & -2B_4 & -2A_4x_4 - 2B_4y_4 & 2A_4y_4 - 2B_4x_4 & 2x_4 & 2y_4 & 1 \\ -2A_5 & -2B_5 & -2A_5x_5 - 2B_5y_5 & 2A_5y_5 - 2B_5x_5 & 2x_5 & 2y_5 & 1 \end{bmatrix}_{5 \times 7} \quad (25)$$

若  $\text{rank}(\mathbf{M}) = 5$ ，则矩阵方程式(15)可以求得唯一解。因此，只要使  $\mathbf{M}$  的秩小于 5，算法就无法求解出未知量的真值。使  $\text{rank}(\mathbf{M}) < 5$  直观的方法有：2 个飞行器中的其中 1 个绝对静止(如图 4 所示)；2 个飞行器均沿直线飞行(如图 5 所示)。

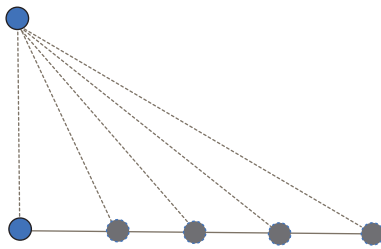


图 4 算法求解结果发散形位 1

Fig. 4 Algorithm-diverging position 1

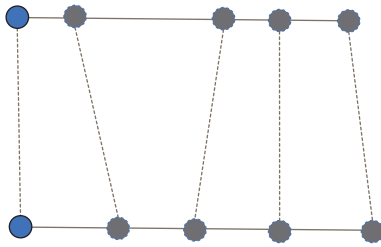


图 5 算法求解结果发散形位 2

Fig. 5 Algorithm-diverging position 2

当测距次数大于 5 次时，使用 RLS 辨识式(11)中未知量  $\mathbf{x}$  的值。由于矩阵  $\mathbf{M}$  的每一列数据分别代表待辨识参数  $\mathbf{x}$  对应分量的观测值，因此当矩阵  $\mathbf{M}$  的某一列观测值为 0 时，该分量的观测值始终不存在，也就无法求解得到该分量的最小二乘辨识，或者求解值趋于无穷大。观察式(13)中矩阵  $\mathbf{M}$  的元素组成可知，当观测飞行器 B 沿直线飞行时， $A_i = 0$ (其在本体系下的 X 轴分量为 0)；当观测飞行器 B 静止时， $A_i$  和  $B_i$  均为 0(X 和 Y 轴分量均为 0)。同理，当被观测飞行器 A 沿直线飞行时， $x_i = 0$ ；当被观测飞行器 A 静止时， $x_i$  和  $y_i$  均为 0。

为了得到飞行器 A 相对于飞行器 B 的位置及航向角，只需辨识待求解未知量  $\mathbf{x}$  的  $[u \ v \ \cos\Delta\phi$

$\sin\Delta\phi]$  分量，而以上分量分别对应于矩阵  $\mathbf{M}$  的前四列，只要这几列的观测值不为 0，就可通过 LS 辨识出其对应的真值。由前面的分析可知，当 2 个飞行器以如下描述的轨迹飞行时，飞行器 B 无法辨识出飞行器 A 的相对位置及航向角：

1) 飞行器 B 沿直线飞行，且飞行器 A 沿直线飞行或静止；

2) 飞行器 B 静止，而飞行器 A 做任意机动。

值得注意的是，由前面的分析可知，当飞行器 B 做 S 形机动时，飞行器 A 无论沿直线飞行或是静止不动，飞行器 B 均可估计出飞行器 A 的相对位置，但飞行器 A 静止时，飞行器 B 则无法估计出相对航向角。

## 4 数值仿真

### 4.1 仿真轨迹与参数设置

假设飞行器 A 在二维水平惯性系下的初始位置为  $[0, 100]^T$ ，飞行器 B 初始位置为  $[0, 0]^T$ ，2 个飞行器以小于 5m/s 的相对速度飞行，总飞行时长为 60s。为了验证可观测性分析的结论，这里生成了两类飞行轨迹：图 6 所示为使系统状态可观测的飞行轨迹，2 个飞行器分别以不同角速度做匀速 S 形机动；图 7(a)和图 7(b)所示为第 3 节状态可观测分析中指出的 1)和 2)两种使系统状态不可观测情况对应的典型飞行轨迹。图 7(a)展示了 2 个飞行器均沿直线匀速飞行时的轨迹，图 7(b)展示了飞行器 A

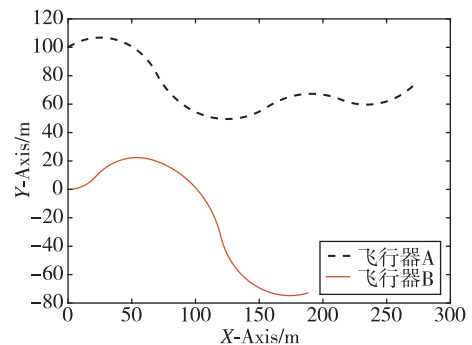
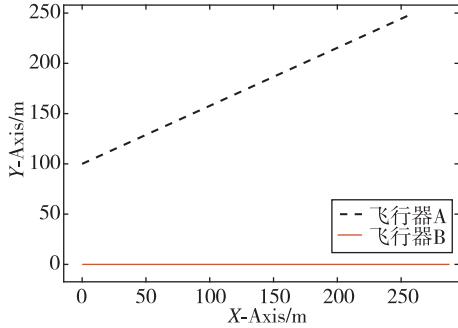


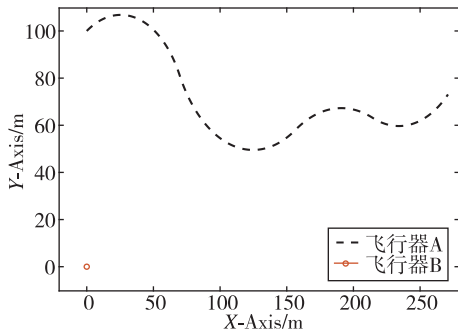
图 6 状态可观测轨迹

Fig. 6 Observable state trajectory

做匀速 S 形机动, 飞行器 B 静止不动时的飞行轨迹。



(a) 2 个飞行器均沿直线飞行的轨迹



(b) 飞行器 B 静止, 而飞行器 A 做 S 形机动的轨迹

图 7 状态不可观测轨迹

Fig. 7 Unobservable state trajectory

采用的机载 IMU 由陀螺仪和加速度计组成, 假设二者的测量误差主要包括常值误差和随机误差; 数据链测距误差只包含随机误差, 将该误差建模为零均值高斯白噪声。这些传感器的误差参数如表 2 所示。

表 2 机载测量仪器误差

Tab. 2 On-board measurement error

测量量	常值误差	随机误差
角速度/[ $^{\circ}$ ]/h]	10	5
单轴加速度/ $\mu g$	10	10
数据链测距/m	/	1

## 4.2 算法求解结果

### 4.2.1 状态可观测轨迹求解结果

采用 4.1 节图 6 生成的系统可观测轨迹进行飞行器间初始相对位置及航向角的递推求解。飞行器测距时间间隔为 1s, 采用飞行 0~20s (20 次测距) 的数据进行初值生成, 而不是 5 次测距。选取该测距次数的主要原因在于: 在采样间隔较小时, 飞

行器在各自初始坐标系下的相对运动不明显, 采样点连线近似直线, 即飞行器的飞行形式接近图 5 给出的使求解算法失真的飞行形位, 初始估计偏差较大。

图 8 和图 9 分别展示了使用 RLS 进行 1000 次打靶仿真求得的 B 飞行器对 A 飞行器的初始位置估计误差及其分布。初始航向角估计误差的分布如图 10 所示。

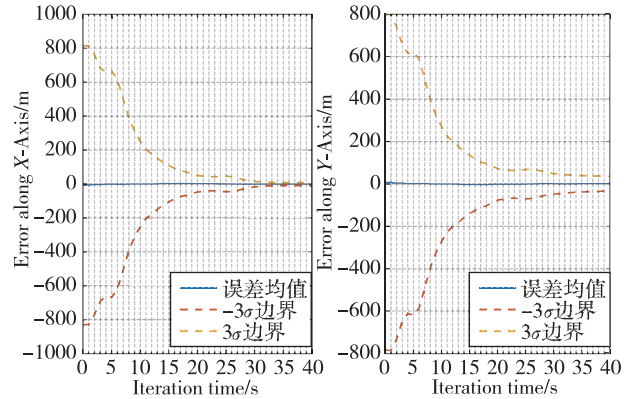


图 8 X 和 Y 轴位置估计误差

Fig. 8 X- and Y-axis position error

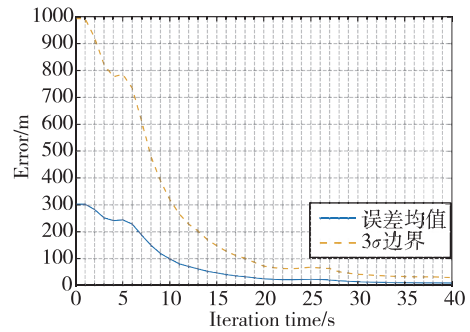


图 9 距离估计误差

Fig. 9 Distance estimation error

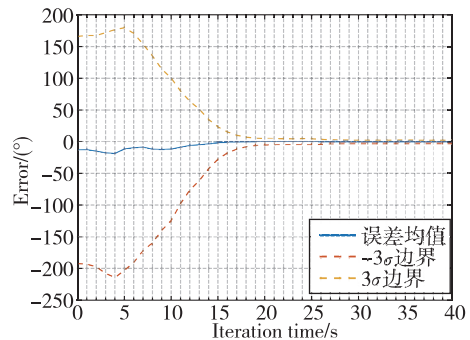


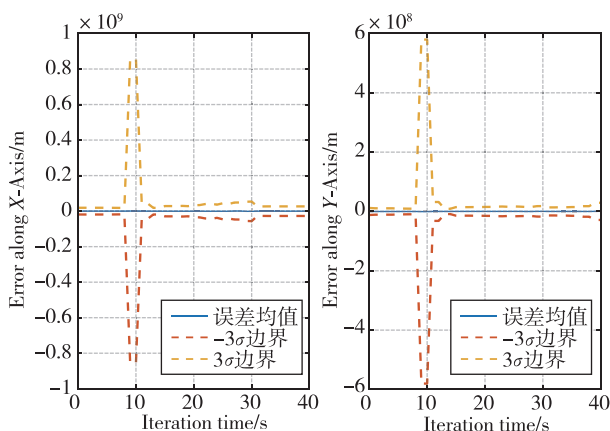
图 10 航向角误差估计

Fig. 10 Heading angle estimation error

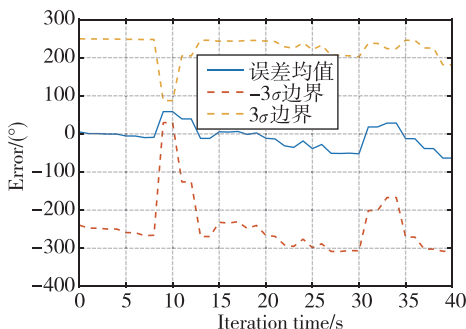
由图 8 及图 9 可知,运用 RLS 生成的位置估计初值误差及标准差较大,表明初值估计波动大,可信度较低。迭代运算的前 20s(测距 20 次),初始位置估计及标准差迅速收敛。迭代至 40s 时,位置估计误差趋于稳定,且误差均值约为 9m,达到初始相对距离的 10% 以内。由图 10 可知,航向角初始估计误差均值较小,但标准差较大,表明其估计误差波动较大,估计值可信度较低。迭代运算的前 20s,标准差下降明显,估计误差迅速收敛。当迭代运算至 40s 时,估计误差趋于稳定,且误差均值在 1° 以内。

4.2.2 状态不可观测轨迹求解结果

由第 3 章状态可观测性理论分析可知,在图 7 (a)和图 7(b)两种飞行轨迹下,飞行器 B 无法估计出飞行器 A 的相对位置及航向角。图 11 和图 12 分别展示了在这两种飞行轨迹下飞行器 B 对飞行器 A 的相对位置和航向角估计误差及其分布。



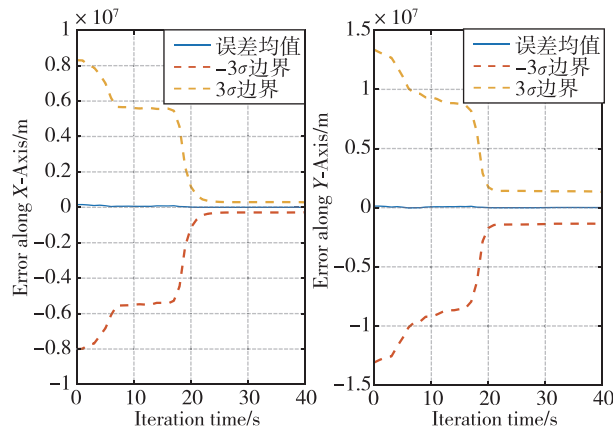
(a) X 和 Y 轴位置估计误差



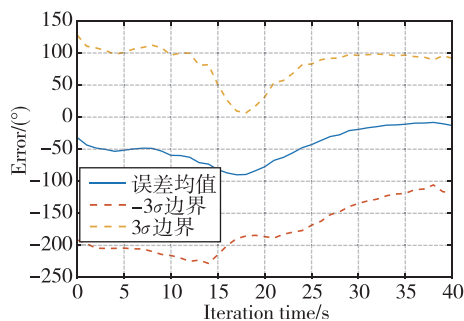
(b) 航向角误差估计

图 11 2 个飞行器均沿直线飞行时,飞行器 B 对飞行器 A 的相对位置及航向角估计误差

Fig. 11 The relative position and heading angle estimation error of UAV B relative to UAV A when both UAVs are flying in straight lines



(a) X 和 Y 轴位置估计误差



(b) 航向角误差估计

图 12 飞行器 B 静止,而飞行器 A 做 S 形机动时,飞行器 B 对飞行器 A 的相对位置及航向角估计误差

Fig. 12 The relative position and heading angle estimation error of UAV B relative to UAV A when UAV B stands still and UAV A flies a S trajectory

由图 11 和图 12 的仿真结果可知,迭代至 40s 时,两种飞行轨迹下的相对位置单轴估计误差均值均大于 1000m,且相对航向角估计误差均方差均大于 100°。因此,飞行器 B 无法估计出飞行器 A 的相对位置和航向角,即仿真结果验证了理论分析中状态不可观测的飞行轨迹。

为了进一步说明无人飞行器的飞行轨迹对递推算可观测性的影响,下面将通过表格的形式对 2 个飞行器在不同轨迹组合下,飞行器 B 对飞行器 A 的相对位置及航向角的估计结果进行仿真总结,仿真结果如表 3 所示。

表 3 中,“√”表示飞行器 B 在该飞行轨迹下可以估计出飞行器 A 的相对位置 X 轴分量、Y 轴分量或航向角  $\Delta\psi$  的值,“×”表示无法估计出对应的值。

需要说明的是,当飞行器 B 沿直线飞行,而飞行器 A 做匀速 S 形机动时,理论分析表明,飞行



表3 飞行轨迹和仿真结果

Tab. 3 UAVs' trajectory and simulation result

飞行器 B 对飞行器 A 的相对位姿可观测性仿真结果		飞行器 A		
		S 形机动	直线飞行	静止
S 形机动	X 轴	✓	✓	✓
	Y 轴	✓	✓	✓
	$\Delta\psi$	✓	✓	×
飞行器 B 直线飞行	X 轴	✓	×	×
	Y 轴	✓	×	✓
	$\Delta\psi$	✓	×	×
飞行器 B 静止	X 轴	×	×	×
	Y 轴	×	×	×
	$\Delta\psi$	×	×	×

器 B 对飞行器 A 的相对位置 X 轴分量没有可观测性,但这种情况下算法可以辨识式(16)中  $\hat{x}$  的分量  $[\cos\Delta\psi \ \sin\Delta\psi \ L_1 \ L_2]^T$ 。利用式(10)和已辨识的上述分量,可以将相对位置  $[u \ v]^T$  求解出来,求解关系式如下

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi \\ \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

因此,可以认为这种情况下飞行器 B 仍然对飞行器 A 的 X 轴位置分量具有观测性。

由表 3 可以看出,当飞行器 B 做 S 形机动时,其对飞行器 A 的相对位姿状态量有较高的可观测性;当飞行器 B 沿直线飞行时,其对飞行器 A 相对位姿状态量的可观测性开始降低;当飞行器 B 完全静止时,其完全失去了对飞行器 A 状态量的可观测性。因此,表 3 的仿真结果验证了第 3 节的可观测性分析结论,并为算法的飞行实践提供了有意义的指导。

#### 4.3 算法求解速率分析

本节对 5 次测距算法、LS 以及 RLS 的求解效率进行对比分析,算法程序的运算环境为 6 核 Inter Core i5-10400 处理器。以 4.1 节使系统状态可观测的无人飞行器轨迹(图 6)为例,测距时间间隔为 1s,分别对以上三种相对位姿求解算法进行了 1000 次打靶仿真,获得各算法对应的平均求解时间及相对位置求解精度,如表 4 所示。表 4 中,相对位置求解误差指 X 和 Y 轴求解误差的平方和开根,即距离误差。算法运行时间越短,位置误差均值及方差越小,则认为求解效率越高。对于 5 次测距算法,当总测距数据大于 5 次,如 30 次测距时,按照总测距次

数等间隔取样 5 次进行位姿解算。

表 4 算法求解效率

Tab. 4 Solution efficiency of different algorithms

算法求解效率		测距次数				
		30	40	50	60	
算法求解时间/ $10^{-5}$ s	5 次测距	16.9	16.1	16.6	16.1	
	LS	2.2	2.2	2.2	2.3	
	RLS	5.7	7.2	8.8	10.5	
5 次测距	mean	28.7	27.2	19.3	12.5	
	$3\sigma$	71.2	58.0	36.2	31.1	
相对位置求解误差/m	LS	mean	99.9	25.7	14.2	9.6
	$3\sigma$	215.2	49.3	27.6	20.3	
RLS	mean	97.2	25.9	14.4	9.7	
	$3\sigma$	208.6	49.4	27.6	20.7	

由表 4 可以得出以下结论:

1)从算法求解时间来看,5 次测距算法耗时最长,算法运算量最大,这是因为在测量数据较少的情况下,对测量数据的进一步解算(如生成矩阵  $\mathbf{H}$  的极大线性无关组、线性无关组的系数解算)需要较多运算步骤。直接对线性方程组求取最小二乘逆的算法(LS)求解时间最短,与其在求解结果方面等价的 RLS 次之,且递推算法随着测距次数的增多,单次递推求解时间不变,总运算时间线性增长。

2)从算法求解误差来看,当测距次数为 30 次时,5 次测距算法求解的位置误差均值及方差最小,LS 及 RLS 算法位置求解误差及方差相当。当测距次数大于 30 且不断增大时,LS 及 RLS 算法的位置误差及方差均快速下降,且均小于 5 次测距算法对应的求解误差。

综上所述,在测距次数较少时,5 次测距算法能够利用测距数据间的关系解算得到比 LS 及 RLS 精度更高的结果,但需要付出比其他两种算法更多的时间代价,且该算法只利用了 5 次测量信息,因此误差波动极大。RLS 能够在每次递推过程中输出当前的相对位姿估计,且每次计算只消耗极小的机载算力,相较于在进行一段飞行时间后消耗较多机载算力才能给出相同估计精度的 LS,以及误差波动较大的 5 次测距算法,RLS 在计算的实时性及稳定性方面具有显著优势。

#### 4.4 算法敏感性分析

运用 RLS 求解 2 个无人飞行器初始相对位置的误差源主要包括:飞行器间测距误差,由机载

IMU 常值漂移引起的本体系下的位置误差。由于该递推算法在解算过程中同时存在位置误差及测距误差,无法反映单个误差因素对算法精度带来的影响。图 13 展示了当飞行器位置信息准确时,测距误差对姿态解算精度的影响。图 14 展示了飞行器测距无误差,但其中 1 个飞行器本体系下的位置测量存在误差时,对姿态解算精度的影响。

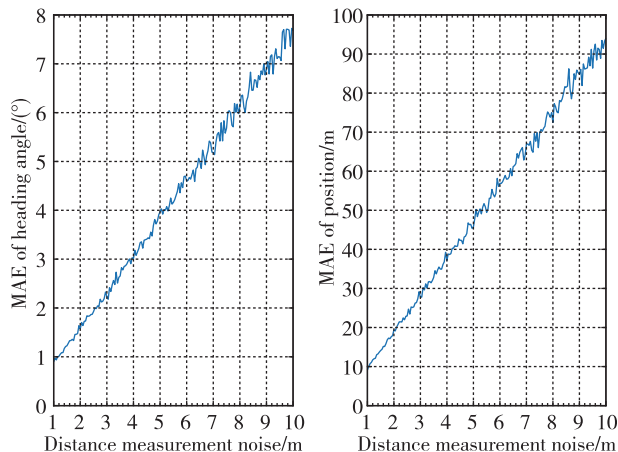


图 13 航向角及位置估计误差关于测距噪声均方差的曲线

Fig. 13 Heading angle and position mean absolute errors(MAE) as functions of distance measurement noise standard deviation

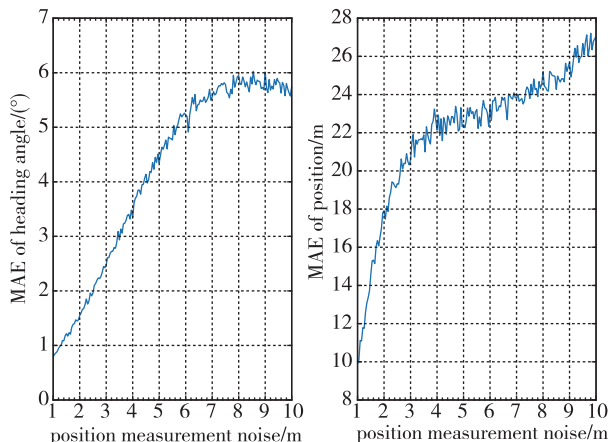


图 14 航向角及位置估计误差关于位置测量噪声的曲线

Fig. 14 Heading angle and position mean absolute errors(MAE) as functions of position measurement noise standard deviation

由图 13 可知,航向角及位置估计误差与测距噪声近似成正比关系。观察式(8)可以发现,只有  $b_i$  项包含距离测量量,因此当测距误差逐渐增大,而其他系数项均不变时,各项对应的未知量求解误差均匀增大。

从图 14 可以看出,航向角估计误差及位置估计误差随位置测量噪声的增大均呈现增大趋势,且估计误差的增大趋势逐渐放缓。比较图 13 及图 14 可以发现,估计算法对测距敏感度远大于位置测量敏感度。这可以由式(8)说明,此时当其中 1 个飞行器位置测量存在误差时,式(8)左侧误差增大,右侧前三项未知量系数误差同样增大,一定程度上减小了误差对未知量的影响。

## 5 结论

本文针对 GNSS 拒止环境下无人飞行器间的相对定位问题,建立了一种基于机载 IMU 与数据链测距组合的相对定位算法,并运用数值仿真进行验证,得到以下结论:

1) 进行相对位姿估计的飞行器 B 沿直线飞行或静止时,会导致被估计飞行器 A 的相对状态量部分或全部不可观测。当飞行器 B 做 S 形机动时,无论飞行器 A 如何机动,飞行器 B 都能获得较好的相对状态量的可观测性。

2) 将 RLS 应用于多次测距能够实时快速迭代求解初始相对位姿,最终求解的相对位置误差均值稳定在初始距离的 10% 以内。

3) 仅测距定姿算法的求解误差与测距噪声及位置噪声近似呈正比,且算法对测距噪声的敏感度远高于位置噪声,这是由仅测距算法的结构造成的。

## 参考文献

- [1] 文永明,石晓荣,黄雪梅,等.一种无人机集群对抗多耦合任务智能决策方法[J].宇航学报,2021,42(4):504-512.  
Wen Yongming, Shi Xiaorong, Huang Xuemei, et al. An intelligent decision-making method for multi-coupling tasks of UAV cluster countermeasure[J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(4): 504-512 (in Chinese).
- [2] 焦振田.森林防火无人机系统的研究[D].西安:西安理工大学,2019.  
Jiao Zhen-tian. Research on UAV system for forest fire prevention[D]. Xi'an: Xi'an University of Technology, 2019 (in Chinese).
- [3] 段海滨,邱华鑫,陈琳,等.无人机自主集群技术研究展望[J].科技导报,2018,36(21):90-98.  
Duan Haibin, Qiu Huaxin, Chen Lin, et al. Prospects on unmanned aerial vehicle autonomous swarm technology[J]. Science & Technology Review, 2018, 36(21):

- 90-98(in Chinese).
- [4] Queralta J P, Almansa C M, Schiano F, et al. UWB-based system for UAV localization in GNSS-denied environments: characterization and dataset[C]// Proceedings of 2020 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Las Vegas, IEEE Press, 2020: 4521-4528.
- [5] Chiella A, Machado H N, Teixeira B, et al. GNSS/LiDAR-based navigation of an aerial robot in sparse forests[J]. *Sensor*, 2019, 19(19): 4061.
- [6] Chi C, Zhan X, Wang S, et al. Enabling robust and accurate navigation for UAVs using real-time GNSS precise point position and IMU integration[J]. *The Aeronautical Journal*, 2021, 125(1283): 87-108.
- [7] 戴吴蛟, 丁晓利, 朱建军. GPS 动态变形测量中的多路径效应特征研究[J]. *大地测量与地球动力学*, 2008, 28(1): 65-71.  
Dai Wujiao, Ding Xiaoli, Zhu Jianjun. Study on multipath effect in structure health monitoring using GPS [J]. *Journal of Geodesy and Geodynamic*, 2008, 28(1): 65-71(in Chinese).
- [8] Kriegleder M, Digumarti S T, Oung R, et al. Rendezvous with bearing-only information and limited sensing range[C]// Proceedings of 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Seattle: IEEE Press, 2015: 5941-5947.
- [9] Robert J F, Stirling T, Zufferey J C, et al. 3-D relative positioning sensor for indoor flying robots[J]. *Autonomous Robots*, 2012, 33(1-2): 5-20.
- [10] Li Q, Queralta J P, Gia T N, et al. Visual odometry offloading in internet of vehicles with compression at the edge of the network[C]// Proceedings of 2019 12<sup>th</sup> International Conference on Mobile Computing and Ubiquitous Network (ICMU). Kathmandu, Nepal: IEEE Press, 2019: 1-2.
- [11] Shen H M, Zong Q, Lu H C, et al. A distributed approach for lidar-based relative state estimation of multi-UAV in GPS-denied environments[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022, 35(1): 59-69.
- [12] Guo K X, Qiu Z R, Miao C X, et al. Ultra-wideband-based localization for quadcopter navigation[J]. *Unmanned System*, 2016, 4(1): 23-34.
- [13] Coppola M, McGuire K, Scheper K, et al. On-board communication-based relative localization for collision avoidance in micro air vehicle teams[J]. *Autonomous Robots*, 2018, 42(8): 1787-1805.
- [14] Guo K, Qiu Z, Meng W, et al. Ultra-wideband based cooperative relative localization algorithm and experiments for multiple unmanned aerial vehicles in GPS denied environments [J]. *International Journal of Micro Air Vehicles*, 2017, 9(3): 169-186.
- [15] Helm S, Coppola M, McGuire K, et al. On-board range-based relative localization for micro air vehicles in indoor leader-follower flight[J]. *Autonomous Robots*, 2020, 44: 415-441.
- [16] Martel F M, Sidorenko J, Bodensteiner C, et al. Unique 4-DOF relative pose estimation with six distances for UWB/V-SLAM-based devices[J]. *Sensors*, 2019, 19(20): 4366.
- [17] Nguyen T M, Zaini A H, Wang C, et al. Robust target-relative localization with ultra-wideband ranging and communication[C]// Proceedings of 2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Brisbane: IEEE Press, 2018: 2312-2319.
- [18] Zhou X S, Roumeliotis S I. Determining the robot-to-robot relative pose using range-only measurements [C]// Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Robotic and Automation. Roma, Italy: IEEE Press, 2007: 4025-4031.

(编辑:李瑾)