

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2022.06.019

# 采用双模压缩态的光子纠缠光纤陀螺仪研究

张桂才<sup>1</sup>, 冯菁<sup>1</sup>, 马林<sup>1</sup>, 马骏<sup>1</sup>, 杨晔<sup>1,2</sup>, 王周祥<sup>1</sup>

(1. 天津航海仪器研究所, 天津 300131;  
2. 中国船舶航海保障技术实验室, 天津 300131)

**摘要:**对采用双模压缩态的光子纠缠光纤陀螺仪进行了理论研究,采用角动量理论首次推导了双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的相位检测灵敏度,并证明了当光子数足够大时,可以达到海森堡极限。针对采用双模压缩态的光子纠缠光纤陀螺仪的二阶符合计数探测方案远未达到海森堡极限的情况,通过考察光子纠缠光纤陀螺仪各输出态的二阶符合计数对总的二阶相关光强的贡献,发现二阶符合计数探测方案存在量子增强信息的抵消,也即其中一个接收端光子数为偶数的输出态和光子数为奇数的输出态的二阶符合计数形成互补的倍频干涉条纹,进而相互抵消。因此,需要优化探测方案,提取完整的量子增强信息,才能实现海森堡极限的相位检测灵敏度。

**关键词:**光子陀螺;双模压缩态;光子纠缠;海森堡极限;二阶符合计数

**中图分类号:**U666.1;V11 **文献标志码:**A **文章编号:**2095-8110(2022)05-0156-07

## Study on Photon Entangled Fiber Optic Gyroscope Using Two-Mode Squeezed State

ZHANG Gui-cai<sup>1</sup>, FENG Jing<sup>1</sup>, MA Lin<sup>1</sup>, MA Jun<sup>1</sup>, YANG Ye<sup>1,2</sup>, WANG Zhou-xiang<sup>1</sup>

(1. Tianjin Navigation Instruments Research Institute, Tianjin 300131, China;  
2. Laboratory of Science and Technology on Marine Navigation and Control, CSSC, Tianjin 300131, China)

**Abstract:** The photon entangled fiber optic gyroscope with two-mode squeezed state is studied theoretically. The phase detection sensitivity of photon entangled fiber optic gyroscope with two-mode squeezed state input is derived for the first time using angular momentum theory. It is proved that when the number of photons is large enough, the Heisenberg limit can be reached. In view of the fact that the second-order coincidence count detection scheme of photon entangled fiber optic gyroscope using two-mode squeezed state is far from reaching the Heisenberg limit, by investigating the contribution of the second-order coincidence count of each output state of photon entangled fiber optic gyroscope to the total second-order correlation light intensity, it is found that the second-order coincidence count detection scheme has a cancellation on quantum enhanced information, that is, the frequency doubling interference fringes of the second-order coincidence count of the output state with even photon number and the output state with odd photon number at one receiving end are complementary, which cancel each other. Therefore, it is necessary to optimize the detection scheme and extract complete quantum enhancement information to achieve the phase detection sensitivity of Heisenberg limit.

收稿日期:2022-02-23;修订日期:2022-04-02

基金项目:装备预研基金项目(80917010101)

作者简介:张桂才(1964-),男,研究员,主要从事光纤陀螺技术方面的研究。

**Key words:** Fiber optic gyroscope; Two-mode squeezed state; Photon entanglement; Heisenberg limit; Second-order coincidence count

## 0 引言

光纤陀螺是一种新型全固态光电惯性仪表,与传统的基于质量体动力学效应的机械陀螺相比,具有无运动部件、高可靠、长寿命、低成本、快速启动、动态范围大及精度覆盖面广等优点,已广泛应用于陆、海、空、天以及民用领域<sup>[1-2]</sup>。目前,国内外光纤陀螺技术的发展有两个方向<sup>[2]</sup>,一方面是基于传统干涉型光纤陀螺技术,面向高稳定、长航时及甚高精度的惯性测量和战略应用领域的产品研发和综合性能提升<sup>[3]</sup>,如法国 iXblue 公司已研制出实验室精度优于 1n mile/30 昼夜的潜艇应用光纤陀螺惯性导航系统<sup>[4]</sup>;另一方面是新的精度提升前沿技术的探索,如 Honeywell 公司提出了基于光子晶体光纤的用于绝对基准的紧凑型超稳定陀螺<sup>[5-6]</sup>。

在传统光纤陀螺中,光按经典场处理,但探测过程被量子化,具有一种统计特征,被探测的光子数  $M$  服从泊松统计,光子数的标准偏差  $\Delta M = \sqrt{\langle M \rangle}$ ,其中  $\langle M \rangle$  记为探测的平均光子数。换句话说,传统光纤陀螺的相位检测灵敏度受相对不确定性  $\Delta\phi \propto \Delta M / \langle M \rangle = 1 / \sqrt{\langle M \rangle}$  的影响,称为散粒噪声极限<sup>[1]</sup>。另一方面,基于量子增强干涉测量技术的光子纠缠光纤陀螺仪提供了一种新的精度提升技术途径,可以突破经典 Sagnac 干涉仪的散粒噪声极限,达到海森堡极限<sup>[7]</sup>。目前,基于量子纠缠的光子传感技术已在激光干涉引力波观测仪等超精密探测领域获得应用<sup>[8-9]</sup>。

光子纠缠光纤陀螺仪由 M. Fink 在 2019 年首次提出,并获得了突破散粒噪声极限的实验结果<sup>[7]</sup>。在对光子纠缠光纤陀螺仪的研究中发现,如果采用传统光纤陀螺的单端口输入光学结构,即使采用非经典光子源,其相位检测灵敏度仍受散粒噪声限制,因此提出了采用双环行器的双输入/输出的光子纠缠光纤陀螺仪,并首次证明了这种双端口输入/输出结构仅对对称输入态才具备光路互易性。

双模压缩态是量子传感和测量中常见的一种对称非经典光量子态,其实验制备已有大量报道<sup>[10-12]</sup>,但其在光子纠缠光纤陀螺仪中的应用特性尚未被人们充分认识<sup>[13]</sup>。A. Kolkiran 对采用双模压缩态的 Sagnac 干涉仪进行了理论探讨<sup>[14]</sup>,但给

出的结果远未实现海森堡极限的相位检测精度。本文采用抽象自旋空间的角动量理论,首次对双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的相位检测灵敏度潜力进行了评估,并证明了当这种对称输入态的光子数足够大时,可以达到海森堡极限的相位检测精度,而进一步分析还揭示出,二阶符合计数的探测方案实际上存在量子增强相位信息的抵消,这正是 A. Kolkiran 的相关研究未达到海森堡极限相位检测性能的原因。本文对光子纠缠光纤陀螺仪的光源选型和探索新的相位检测方案具有参考意义。

## 1 双模压缩态及其特性

双模压缩态可以用对真空态  $|00\rangle$  应用双模压缩算符  $S(r) = \exp[r(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger)]$  来产生,其中,  $r$  是与晶体非线性、泵浦振幅和晶体长度成比例的压缩参数,  $\theta$  是压缩相位。双模压缩态通过强光泵浦的自发参量向下转换(Spontaneous Parametric Down-Conversion, SPDC)等非线性光学过程制备。在光子纠缠光纤陀螺仪中,双模压缩输入态  $|in\rangle$  可以表示为<sup>[14-16]</sup>

$$|in\rangle =$$

$$S(r)|00\rangle = \frac{1}{\cosh r} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{i\theta} \tanh r)^n |nm\rangle \quad (1)$$

可以看出,双模压缩态是一个对称输入的非经典态。

根据量子力学公式<sup>[17]</sup>

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} =$$

$$B + \xi[A, B] + \frac{\xi^2}{2!}[A, [A, B]] + \dots \quad (2)$$

$$\text{令 } B = a_1, \xi = r, A = -(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger),$$

则有

$$[A, B] = [-(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger), a_1] = -e^{i\theta}a_2^\dagger$$

$$[A, [A, B]] = [-(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger), -e^{i\theta}a_2^\dagger] = a_1$$

$$[A, [A, [A, B]]] = [A, B] = -e^{i\theta}a_2^\dagger$$

⋮

(3)

因而在海森堡图像中,真空态的双模压缩算符演变为

$$\begin{aligned}
 S^\dagger(r)a_1S(r) &= e^{-r(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger)} a_1 e^{r(e^{-i\theta}a_1a_2 - e^{i\theta}a_1^\dagger a_2^\dagger)} \\
 &= a_1 - re^{i\theta}a_2^\dagger + \frac{r^2}{2!}a_1 - \frac{r^3}{3!}e^{i\theta}a_2^\dagger + \dots \\
 &= a_1 \cosh r - e^{i\theta}a_2^\dagger \sinh r \quad (4)
 \end{aligned}$$

同理有

$$S^\dagger(r)a_2S(r) = a_2 \cosh r - e^{i\theta}a_1^\dagger \sinh r \quad (5)$$

进而还可以证明

$$\begin{aligned}
 S^\dagger(r)a_1^\dagger S(r) &= a_1^\dagger \cosh r - e^{-i\theta}a_2 \sinh r \\
 S^\dagger(r)a_2^\dagger S(r) &= a_2^\dagger \cosh r - e^{-i\theta}a_1 \sinh r \quad (6)
 \end{aligned}$$

## 2 双模压缩态输入的 Sagnac 干涉仪和二阶符合计数

针对双模压缩态输入的量子 Sagnac 干涉仪需要双输入/双输出的光路特征,提出了一种采用双环行器的光子纠缠光纤陀螺结构,如图 1 所示。这种结构可以实现输入与输出的有效分离。在海森堡图像中,输入算符  $a_1, a_2$  经过理想 Sagnac 干涉仪在两个输出端口演变为输出算符  $b_1, b_2$ , 且有<sup>[14]</sup>

$$\begin{aligned}
 b_i &= U^\dagger a_i U = \sum_{j=1}^2 S_{ij} a_j \\
 b_i^\dagger &= U^\dagger a_i^\dagger U = \sum_{j=1}^2 S_{ij}^* a_j^\dagger \quad (7)
 \end{aligned}$$

式中,  $S_{ij}$  是 Sagnac 干涉仪的传输矩阵  $S$  的元素;  $U$  是与传输矩阵  $S$  对应的 Sagnac 干涉仪的演变算符。传输矩阵  $S$  与分束器、相移器(光纤线圈)有关,可以表示为

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \sin \frac{\phi}{2} \\ -\sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中,  $\phi$  为旋转引起的 Sagnac 相移

$$\phi = \frac{2\pi LD}{\lambda c} \Omega \quad (9)$$

式中,  $L, D$  分别为 Sagnac 干涉仪的光纤长度和线圈直径;  $\lambda$  为输入光波的物理波长;  $c$  为真空中的光速;  $\Omega$  为旋转角速率。

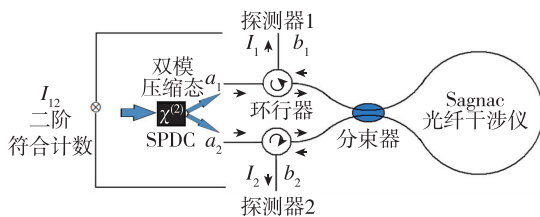


图 1 双模压缩态输入的 Sagnac 干涉仪  
Fig. 1 Sagnac interferometer with two-mode squeezed state input

同时,由式(7)和式(8)可以计算两个输出端口的输出光强  $I_1, I_2$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \langle in | b_1^\dagger b_1 | in \rangle \\
 &= \langle 00 | S^\dagger(r) \left[ \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} a_1^\dagger + \sin \frac{\phi}{2} a_2^\dagger \\ \cos \frac{\phi}{2} a_1 + \sin \frac{\phi}{2} a_2 \end{pmatrix} \right] S(r) | in \rangle \\
 &= \sin^2 \frac{\phi}{2} \sinh^2 r + \cos^2 \frac{\phi}{2} \sinh^2 r \\
 &= \sinh^2 r \quad (10)
 \end{aligned}$$

同理可以得到:  $I_2 = \langle in | b_2^\dagger b_2 | in \rangle = \sinh^2 r$ 。根据能量守恒,总的输入光功率(光子数)为:  $I_1 + I_2 = 2 \sinh^2 r$ 。

二阶符合计数  $I_{12}$  计算为

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= \langle in | b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 | in \rangle \quad (11) \\
 &= \sinh^4 r + \cos^2 \phi \sinh^2 r \cosh^2 r
 \end{aligned}$$

由式(11)得到归一化的二阶符合计数  $g_{12}^{(2)}$  为

$$\begin{aligned}
 g_{12}^{(2)} &= 1 - \frac{\langle in | b_1^\dagger b_2^\dagger b_2 b_1 | in \rangle}{\langle in | b_1^\dagger b_1 | in \rangle \langle in | b_2^\dagger b_2 | in \rangle} \\
 &= -\frac{1}{2} \coth^2 r (1 + \cos 2\phi) \quad (12)
 \end{aligned}$$

这是采用二阶符合计数探测方案的量子纠缠光纤陀螺仪的量子干涉公式。其中

$$2\phi = \frac{2\pi LD}{(\lambda/2)c} \Omega = \frac{2\pi LD}{\lambda_{DC}} \Omega \quad (13)$$

也即被探测光子的纠缠特性导致一种缩短的德布罗意波长  $\lambda_D = \lambda/2$ , 致使干涉条纹的频率增加 2 倍, 相位响应也即 Sagnac 标度因数提高了 2 倍。

基于传统光纤陀螺仪的评估方法,对量子干涉公式式(12)的相位灵敏度进行评估。经典干涉的输出信号正比于光子数  $N$ , 其标准差受散粒噪声限制, 正比于光子数的平方根  $\sqrt{N}$  (泊松分布), 又由于相位响应用于经典干涉  $\cos \phi$  而言为 1, 故经典干涉的相位灵敏度为  $\Delta \phi = 1 \times \sqrt{N}/N = 1/\sqrt{N}$ 。对于量子干涉, 输出信号正比于德布罗意粒子数为  $\coth^2 r$ , 其标准差同样正比于粒子数的平方根  $\sqrt{\coth^2 r}$  (亚泊松分布), 考虑相位响应用于量子干涉  $\cos 2\phi$  而言为 2, 则相位检测灵敏度(相位不确定性)  $\Delta \phi$  为

$$\Delta \phi = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{\coth^2 r}}{\coth^2 r} = \frac{1}{2} \tanh r \quad (14)$$

当  $2 \sinh^2 r > 4$  时,  $\Delta \phi$  甚至比  $\Delta \phi_{\text{shot}}$  还大, 不能实现海森堡极限的相位检测性能, 这也是在 A.

Kolkiran 的文章中观察到的结果<sup>[14]</sup>。因此,需要进一步分析双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的相位检测灵敏度潜力。

### 3 采用角动量理论评估双模压缩态 Sagnac 干涉仪相位灵敏度

#### 3.1 输入态的角动量表征

输入角动量  $J_{x-in}, J_{y-in}, J_{z-in}$  定义为<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} J_{x-in} &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_2 + a_2^\dagger a_1) \\ J_{y-in} &= -\frac{i}{2}(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \\ J_{z-in} &= \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2) \end{aligned} \quad (15)$$

用输出湮灭算符  $b_1, b_2$  代替输入湮灭算符  $a_1, a_2$ , 可以定义输出角动量  $J_{x-out}, J_{y-out}, J_{z-out}$ 。

对于理想的 Sagnac 干涉仪, 任何输入态  $|in\rangle$  都是总光子数算符  $N$  的本征态  $|n_1 n_2\rangle$

$$N |in\rangle = (n_1 + n_2) |n_1 n_2\rangle \quad (16)$$

总光子数算符  $N$ 、角动量分量算符  $J_z$  (本征值为  $m$ ) 与角动量平方算符  $J^2$  (本征值为  $j(j+1)$ ) 对易, 说明输入态是它们的共同本征态。角动量表征的输入态  $|j, m\rangle$  与光子数态表征的输入态  $|n_1 n_2\rangle$  的关系有

$$j = \frac{n_1 + n_2}{2}, m = \frac{n_1 - n_2}{2} \quad (17)$$

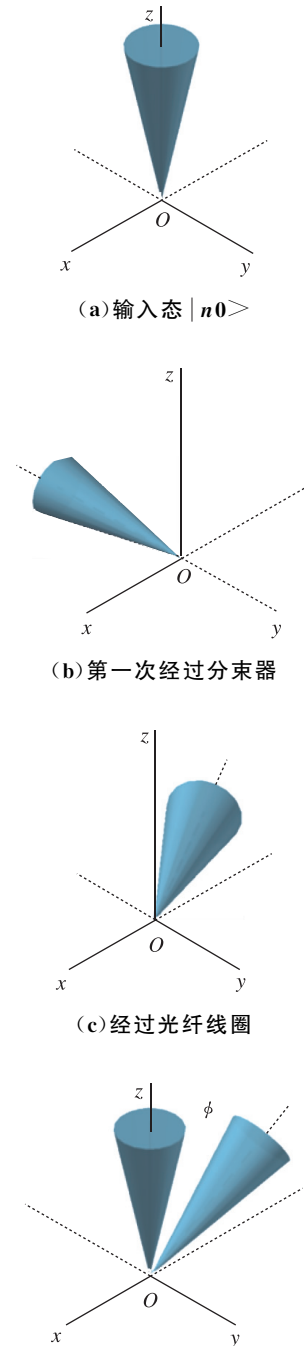
双模压缩态的输出角动量  $z$  分量  $\langle J_{z-out} \rangle = 0$ , 无法提供有效的相位  $\phi$  信息。考虑基于  $J_{z-out}$  的四阶相关统计特性估计 Sagnac 干涉仪输出的相位检测灵敏度<sup>[20]</sup>。通过对输出强度差信号平方和积分, 可以测量  $J_{z-out}^2$  的统计平均, 利用误差传递公式, 相位检测灵敏度为

$$(\Delta\phi)^2 = \frac{\langle J_{z-out}^4 \rangle - \langle J_{z-out}^2 \rangle^2}{\left(\frac{\partial \langle J_{z-out}^2 \rangle}{\partial \phi}\right)^2} \quad (18)$$

#### 3.2 Sagnac 干涉仪的角动量演变模型

实际上, 任何一个双输入/双输出端口的无损耗无源线性量子光学器件都可以描述为在抽象自旋空间的旋转<sup>[21-22]</sup>。假定 Sagnac 干涉仪的分束器是分光比 50 : 50 的理想分束器, 对于 Sagnac 干涉仪来说, 第一个分束器等效于使输入角动量绕  $x$  轴按逆时针旋转了角度  $\pi/2$ ; 相移器(光纤线圈) 等效于使输入角动量绕  $z$  轴按顺时针旋转了角度  $\phi$ ; 第二个分束器等效于使输入角动量绕  $x$  轴按顺时针旋

转了角度  $\pi/2$ 。图 2 作为一个简单例子, 描述了抽象自旋空间中光子数态  $|n0\rangle$  通过 Sagnac 干涉仪的演变。双模压缩态的输入角动量图示具有较复杂的形态, 但通过 Sagnac 干涉仪的演变过程不变。



(d) 第二次经过分束器(输出态), 可以看出其与输入态的夹角为 Sagnac 相移  $\phi$

图 2 用抽象自旋空间的旋转描述光子数态  $|n0\rangle$  通过 Sagnac 干涉仪的演变

Fig. 2 The evolution of photon number states  $|n0\rangle$  through Sagnac interferometer described by the rotation of abstract spin space

Sagnac 干涉仪的角动量矩阵变换可以表示为

$$\begin{pmatrix} J_{x-out} \\ J_{y-out} \\ J_{z-out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi J_{x-in} + \sin\phi J_{z-in} \\ J_{y-in} \\ -\sin\phi J_{x-in} + \cos\phi J_{z-in} \end{pmatrix} \quad (19)$$

可以看出,  $y$  向的角动量  $J_y$  不变, Sagnac 干涉仪相当于一个绕  $y$  轴的角动量旋转变换。

### 3.3 双模压缩态输入的相位灵敏度潜力

利用输出角动量的四阶相关统计特性,首次对双模压缩态输入的 Sagnac 干涉仪的相位检测灵敏度进行了理论分析。由于推导过程冗长繁琐,这里只给出计算结果。实际中,通过对干涉仪的输出光子数(强度)差信号的平方和进行积分,可以测量  $J_z^2$  的期望值

$$\begin{aligned} \langle J_{z-out}^4 \rangle = & \cos^4\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^4 S(r) | 00 \rangle - \sin^3\phi \cos\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in} J_{z-in} J_{x-in}^2 S(r) | 00 \rangle - \\ & \sin^3\phi \cos\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 J_{z-in} J_{x-in} S(r) | 00 \rangle - \sin^3\phi \cos\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in} J_{x-in}^3 S(r) | 00 \rangle - \\ & \sin^3\phi \cos\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in}^3 J_{z-in} S(r) | 00 \rangle + \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 J_{z-in}^2 S(r) | 00 \rangle + \\ & \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 J_{x-in}^2 S(r) | 00 \rangle + \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in} J_{x-in} J_{z-in} J_{x-in} S(r) | 00 \rangle + \\ & \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in} J_{z-in} J_{x-in} J_{z-in} S(r) | 00 \rangle + \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in} J_{z-in}^2 J_{x-in} S(r) | 00 \rangle + \\ & \sin^2\phi \cos^2\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in} J_{x-in}^2 J_{z-in} S(r) | 00 \rangle - \sin\phi \cos^3\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in} J_{x-in} J_{z-in}^2 S(r) | 00 \rangle - \\ & \sin\phi \cos^3\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 J_{x-in} J_{z-in} S(r) | 00 \rangle - \sin\phi \cos^3\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in} J_{z-in}^3 S(r) | 00 \rangle - \\ & \sin\phi \cos^3\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^3 J_{x-in} S(r) | 00 \rangle + \sin^4\phi \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in}^4 S(r) | 00 \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

由输入角动量的定义,得到

$$\langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^4 S(r) | 00 \rangle = \sinh^2 r \cosh^6 r + 7 \sinh^4 r \cosh^4 r + \sinh^6 r \cosh^2 r \quad (24)$$

$$\langle 00 | S^\dagger(r) (J_{x-in} J_{z-in}^2 J_{x-in} + J_{z-in} J_{x-in}^2 J_{z-in}) S(r) | 00 \rangle = \sinh^2 r \cosh^2 r \quad (25)$$

式(23)中其他各项均为0。

由式(18),在小角速率检测也即  $\phi = 0$  时,相位检测灵敏度(相位不确定性)有

$$(\Delta\phi)^2 = \frac{1}{4 \sinh^2 r \cosh^2 r} = \frac{1}{4 \sinh^2 r (1 + \sinh^2 r)} \quad (26)$$

令输出端总光子数  $I_1 + I_2$  为  $N$ , 由于两个输出端口  $I_1 = \langle b_1^\dagger b_1 \rangle = \sinh^2 r$ ,  $I_2 = \langle b_2^\dagger b_2 \rangle = \sinh^2 r$ , 则

$$\sinh^2 r = N/2 \quad (27)$$

代入式(26),因而有

$$(\Delta\phi)^2 = \frac{2}{N(N+2)} \quad (28)$$

当  $N \gg 1$  时,满足海森堡极限  $\Delta\phi_{\min} \approx \sqrt{2}/N$ 。这表明,双模压缩态作为一种典型的非经典光子态,相位检测灵敏度具有海森堡极限的潜力。

### 4 二阶符合计数中的量子增强信息抵消

下面分析式(14)的二阶符合相位检测精度未

$\langle J_z^2 \rangle$  及其方差  $\Delta J_z^4$ 。首先计算  $\langle J_{z-out}^2 \rangle$ 。由  $J_{z-out} = -\sin\phi \cdot J_{x-in} + \cos\phi \cdot J_{z-in}$  (20) 得到

$$\begin{aligned} \langle J_{z-out}^2 \rangle = & \cos^2\phi \cdot \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 S(r) | 00 \rangle + \\ & \sin^2\phi \cdot \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in}^2 S(r) | 00 \rangle - \\ & \sin\phi \cos\phi \cdot \langle 00 | S^\dagger(r) (J_{x-in} J_{z-in} + \\ & J_{z-in} J_{x-in}) S(r) | 00 \rangle \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \langle 00 | S^\dagger(r) J_{z-in}^2 S(r) | 00 \rangle &= 0 \\ \langle 00 | S^\dagger(r) J_{x-in}^2 S(r) | 00 \rangle &= \sinh^2 r \cosh^2 r \\ \langle 00 | S^\dagger(r) (J_{x-in} J_{z-in} + J_{z-in} J_{x-in}) S(r) | 00 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

然后计算  $\langle J_{z-out}^4 \rangle$

达到海森堡极限的原因。由式(1)可以看出,双模压缩态是光子数态  $|nn\rangle$  的叠加,其输出的形态非常复杂。这里以光子数态  $|22\rangle$  为例,探讨双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的二阶符合计数中量子增强信息的抵消。对于光子数态  $|22\rangle$ ,经过 Sagnac 干涉仪后的输出态为

$$\begin{aligned} U|22\rangle = & -\left\{ \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i2\phi} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i4\phi} \right\} \cdot \\ & (|40\rangle + |04\rangle) - \left\{ \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i4\phi} \right\} \cdot \\ & (|31\rangle - |13\rangle) + \left\{ \frac{3}{8} + \frac{1}{4} e^{i2\phi} + \right. \\ & \left. \frac{3}{8} e^{i4\phi} \right\} |22\rangle \end{aligned} \quad (29)$$

可以看出,干涉仪两个输出端口的输出态共有5个可能的光子数态:  $|40\rangle$ 、 $|04\rangle$ 、 $|31\rangle$ 、 $|13\rangle$ 、 $|22\rangle$ ,每个输出态具有各自的生成概率。 $|40\rangle$ 、 $|04\rangle$  态的概率振幅中含有  $2\phi$  和  $4\phi$  相位信息,  $|31\rangle$ 、 $|13\rangle$  中仅含  $4\phi$  信息,  $|22\rangle$  输出态也同时含有  $2\phi$  和  $4\phi$  相位信息。但是,  $|22\rangle$  输入态的二阶符合计数(二阶相关光强)却不含  $4\phi$  信息

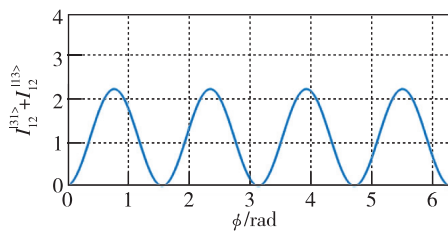
$$I_{12} = I_{12}^{31} + I_{12}^{13} + I_{12}^{22}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \times 3 \times 1 \times \left| \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{3}{8}} e^{i4\phi} \right|^2 + \\
 &2 \times 2 \times \left| \frac{3}{8} + \frac{1}{4} e^{i2\phi} + \frac{3}{8} e^{i4\phi} \right|^2 \\
 &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\phi \tag{30}
 \end{aligned}$$

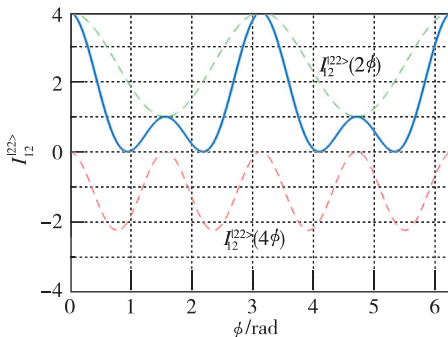
图 3 给出了光子数态  $|22\rangle$  经过 Sagnac 干涉仪后各个输出态分量对二阶符合计数的贡献。可以看出,因为其中一个端口的光强为 0,  $|40\rangle$ 、 $|04\rangle$  态中的  $4\phi$  信息对二阶符合计数没有贡献;在二阶符合计数  $I_{12}$  中,其中一个探测器接收端光子数为偶数的光子数态  $|22\rangle$  的二阶符合计数  $I_{12}^{|22\rangle}$  和光子数为奇数的光子数态  $|31\rangle$ 、 $|13\rangle$  的二阶符合计数  $I_{12}^{|31\rangle} + I_{12}^{|13\rangle}$ , 其 4 倍频干涉条纹的幅值相同,且形成互补(图 3(a)的曲线和图 3(b)中的  $I_{12}^{|22\rangle}$  ( $4\phi$ ) 虚线),导致式(30)中没有  $4\phi$  信息(图 3(c))。还发现,如果单独提取其中一个探测器接收端光子数为奇数的光子数态  $|31\rangle$ 、 $|13\rangle$  的二阶符合计数的  $4\phi$  信息(图 3(a)),并相对输入光子数归一化,其量子干涉公式可以写成

$$g_{12-o}^{(2)} = \frac{7}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} (1 + \cos 4\phi) \tag{31}$$

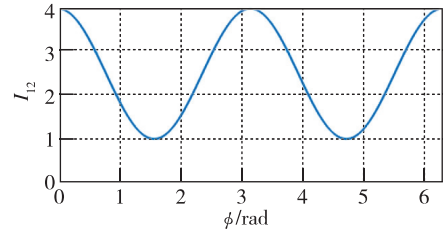
下标“12-o”表示其中一个探测器接收端光子数为奇数(odd)的光子数态  $|31\rangle$ 、 $|13\rangle$  的二阶符合计数对  $4\phi$  信息的贡献,式(31)已接近海森堡极限的相位灵敏度。



(a) 其中一个输出端光子数为奇数的输出态的二阶符合计数



(b) 其中一个输出端光子数为偶数的输出态的二阶符合计数,其中  $I_{12}^{|22\rangle}$  ( $4\phi$ ) 的曲线与(a)的曲线互补



(c)  $|22\rangle$  输入态的总的二阶符合计数,不再含有  $4\phi$  信息

图 3  $|22\rangle$  输入态的二阶符合计数中的量子增强信息的抵消  
Fig 3 Cancellation of quantum enhancement information in the second-order coincidence count of  $|22\rangle$  input state

以上分析表明,在双模压缩态光子纠缠光纤陀螺中,采用二阶符合计数探测方案,实际上存在量子增强信息的抵消,导致相位检测灵敏度无法达到海森堡极限。因此,对于双模压缩态输入光子纠缠光纤陀螺仪,尽管其相位检测灵敏度潜力为海森堡极限,但探测方案应尽可能提取完整的量子增强信息,才能实现海森堡极限的相位检测灵敏度。

### 5 结论

本文对采用双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪进行了研究:

1) 针对双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的双输入/双输出特征,提出了一种采用双环行器的 Sagnac 干涉仪的光路结构,推导了二阶符合计数探测方案的量子干涉公式,发现二阶符合计数远未达到海森堡极限的相位检测性能。

2) 采用四阶角动量理论首次分析了双模压缩态输入的光子纠缠光纤陀螺仪的相位检测灵敏度潜力,证明当光子数足够大时,可以实现海森堡极限。

3) 针对双模压缩态光子纠缠光纤陀螺仪的二阶符合探测方案仅能实现超相位分辨率(干涉条纹加倍)而未能实现超相位灵敏度(达到海森堡极限)的情况,通过考察光子数态  $|22\rangle$  经过 Sagnac 干涉仪后各个输出态分量的二阶符合计数特征,发现二阶符合计数探测方案存在量子增强信息的抵消,也即在其中一个探测器接收端光子数为偶数的输出态和光子数为奇数的输出态的二阶符合计数形成互补的倍频干涉条纹,进而相互抵消。

因此,本文认为,需要精心设计探测方案,提取完整的量子增强信息,才能在双模压缩态光子纠缠光纤陀螺仪中实现海森堡极限的相位检测精度。

### 参考文献

[1] 张桂才. 光纤陀螺原理与技术[M]. 北京: 国防工业

- 出版社, 2008.
- Zhang Guicai. The principles and technologies of fiber-optics gyroscope[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008(in Chinese).
- [2] Sanders G A, Strandjord L K, Williams W, et al. Improvements to signal processing and component minaturization of compact resonator fiber optic gyroscopes[C]// Proceedings of 2018 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS), 2018.
- [3] 张春梅, 刘晓庆. 光纤陀螺零偏温度误差补偿方法分析[J]. 飞控与探测, 2020, 3(2): 70-74.
- Zhang Chunmei, Liu Xiaoqing. Research of bias temperature error compensation method in fiber optic gyroscope[J]. Flight Control & Detection, 2020, 3(2): 70-74(in Chinese).
- [4] Lefèvre H C. The fiber-optic gyroscope, a century after Sagnac's experiment; the ultimate rotation-sensing technology? [J]. Comptes Rendus Physique, 2014, 15(10): 851-858.
- [5] Sanders G A, Sanders S J, Strandjord L K, et al. Fiber optic gyro development at Honeywell[C]//Proceedings of Fiber Optic Sensors and Applications XIII, 2016.
- [6] 冯丽爽, 焦洪臣, 李慧, 等. 空芯光子晶体光纤谐振式光学陀螺技术[C]// 惯性技术发展动态发展方向研讨会, 2016.
- Feng Lishuang, Jiao Hongchen, Li Hui, et al. Hollow-core photonic crystal fiber resonant optical gyro [C]// Proceedings of the Symposium on the Dynamic Development Direction of Inertial Technology, 2016 (in Chinese).
- [7] Fink M, Steinlechner F, Handsteiner J, et al. Entanglement-enhanced optical gyroscope[J]. New Journal of Physics, 2019, 21: 1-7.
- [8] Beckey J L, Ma Y Q, Boyer V, et al. Broadband quantum noise reduction in future long baseline gravitational-wave detectors via EPR entanglement [J]. Physical Review D, 2019, 100(8): 083011.
- [9] Ma Y, Miao H, Pang B H, et al. Proposal for gravitational-wave detection beyond the standard quantum limit through EPR entanglement[J]. Nature Physics, 2017, 13(8): 776-780.
- [10] Li Z, Ma S, Li F. Generation of broadband two-mode squeezed light in cascaded double-cavity[J]. Physical Review, 2015, 92(2): 023856.
- [11] Wasilewski W, Fernholz T, Jensen K, et al. Generation of two-mode squeezed and entangled light in a single temporal and spatial mode[J]. Optics Express, 2009, 17(16): 14444-14457.
- [12] Balybin S, Voloshin A, Tikhonova O. The single-mode and two-mode squeezed light generated in ring microresonators: theoretical limitations and experimental possibilities[C]// Proceedings of 5<sup>th</sup> International Conference on Quantum Technologies (ICQT-2019), 2020.
- [13] Steuernagel O. Approaching the Heisenberg limit with two mode squeezed states[J]. Journal of Optics B Quantum & Semiclassical Optics, 2002, 6(3): 66-70.
- [14] Kolkiran A, Agarwal G. Heisenberg limited Sagnac interferometry[J]. Optics Express, 2007, 15(11): 6798-6808.
- [15] Furusawa A. Quantum states of light[M]. Springer Briefs in Mathematical Physics, 2015.
- [16] Agarwal G S. Quantum optics[M]. Cambridge University Press, 2013.
- [17] Orszag M. Quantum optics: including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence[M]. Springer Press, 2016.
- [18] 张桂才, 冯菁, 马林, 等. 光子纠缠光纤陀螺仪的相位检测灵敏度分析[J]. 中国惯性技术学报, 2021, 29(6).
- Zhang Guicai, Feng Jing, Ma Lin, et al. Analysis on phase detection sensitivity of photon entangled fiber optic gyroscope[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2021, 29(6) (in Chinese).
- [19] Yurke B, McCall S L, Klauder J R. SU(2) and SU(1,1) interferometers[J]. Physical Review A, 1986, 33(6): 4033-4054.
- [20] Kim T, Pfister O, Holland M J, et al. Influence of decorrelation on Heisenberg-limited interferometry with quantum correlated photons[J]. Physical Review A, 1998, 57(5): 4004-4013.
- [21] Lee H, Kok P, Dowling J P. A quantum Rosetta stone for interferometry[J]. Journal of Modern Optics, 2002, 49(14/15): 2325-2338.
- [22] Gerry C C, Campos R A. Generation of maximally entangled photonic states with a quantum-optical Fredkin gate[J]. Physical Review A, 2001, 64(6): 063814.

(编辑:孟彬)