

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2023.01.009

车载惯性定位标定的理论推导及误差分析

余胜义, 彭 惠

(北京航天发射技术研究所, 北京 100076)

摘要:为了解决车载惯性定位系统误差常用的起点纬度标定算法在安装偏差角 90° 附近时误差较大已不适用的问题,以及充实车载惯性定位系统标定计算的理论,首先进行了车载惯性定位系统误差标定计算的推导,证明了误差的可标定性。借鉴等角航线反解理论,得到车载惯性定位系统标定理论依据。参考中分纬度理论,推导出使用平均纬度进行简化计算的航程及航向角误差公式,将其引入惯性定位系统标定计算,提出了一种使用平均纬度代替起点纬度进行标定计算的方法,并对两种标定计算方法的误差进行了公式推导及仿真分析。仿真结果表明,使用平均纬度进行标定计算的误差明显小于使用起点纬度,在安装偏差角较大时,使用平均纬度进行标定计算可使标定计算误差降低90%。证明了提出的标定计算方法在南北纬 55° 、行程不超过90km时可用,高纬度、更长行程下可参照文中公式进行误差估计。

关键词:航位推算;惯性定位;标定;误差

中图分类号:V448

文献标志码:A

文章编号:2095-8110(2023)01-0092-08

Theoretical Derivation and Error Analysis of Onboard Inertial Positioning Calibration

YU Shengyi, PENG Hui

(Beijing Institute of Space Launch Technology, Beijing 100076, China)

Abstract: The commonly used calibration method, which uses the starting latitude to calculate the vehicle inertial location errors is not applicable when the installation deviation angle is near 90° . In order to solve this problem and enrich the theory of calibration for onboard inertial positioning system, the theoretical calibration formula of location errors for the onboard inertial positioning system is deduced, and it is proved that the errors can be calibrated. Using the rhumb line theory, the theoretical basis of onboard inertial positioning system is proposed. The simplified formulas of the voyage and course angle are deduced with the theory of the mid-latitude. And then, a calibration method that uses the mean latitude to calculate the inertial positioning system errors is proposed using the simplified formulas, and the calibration calculation method which uses the starting latitude is comparatively analyzed and simulated. The simulation analysis results show that the calibration calculation errors using the mean latitude are less than the calculation errors that use the starting latitude, when the installation deviation angle is large, calibration calculation errors can be decreased by 90% using the mean latitude. The calibration calculation method in this paper is applicable at 55° north-south latitude and with voyage not more than 90 kilometers. For higher latitude and longer voyages, errors can be estimated referring to the formula in this paper.

收稿日期:2022-04-29; **修订日期:**2022-06-08

作者简介:余胜义(1974-),男,高级工程师,主要从事惯性定位定向方面的研究。

Key words: Position reckoning; Inertial positioning; Calibration; Errors

0 引言

相较于传感器信息融合滤波的定位方法,航位推算定位方法的计算相对简单,对导航计算机的要求较低,系统模型简单,不存在长时间滤波易导致系统发散的问题^[1-2],广泛应用于中精度车载惯性定位系统中。航位推算定位的系统误差主要为方位安装偏差角误差(以下简称“安偏角”)及里程计刻度系数误差^[3-5](以下简称“里程系数”)。对惯性定位系统误差的标定是惯性定位系统的前提,常见的标定惯性定位系统误差的方法有以下两种:

一种是将安偏角和里程系数作为状态量,通过卡尔曼滤波器估计可获得安偏角和里程系数^[6-7],这种方法对导航计算机的要求较高,且受标定路线所限,若安偏角和里程系数的可观性差^[8],则难以完成标定^[9-10];

另一种是将载车运动投影到平面中,采用起始点和终止点的标准位置以及惯性定位系统的输出进行标定计算,标定计算结果与行驶路径无关^[11],标定计算量小,易于实现。为了解决常用的起点纬度标定算法在安装偏差角 90°附近时误差较大已不适用的问题,本文对这种标定方法的公式进行了推导,并对两种计算方法的误差进行了分析。

1 定位系统误差可标性证明

如图 1 所示,设标准起点 X_1, Y_1 , 标准终点 X_2, Y_2 , 惯性定位解算终点 X_3, Y_3 , 假设行驶全程中惯性导航系统给出方位的安偏角为 ϵ (航向漂移很小), 里程系数为 k 。 $k\Delta S_i$ 是第 i 个解算周期中测量的行驶里程; $\phi_i + \epsilon$ 是第 i 个解算周期中测量的方位角。

1.1 航位推算原理

航位推算就是把每个解算周期内测量的行驶里程分解到北、东向后累加。如图 1 所示的 I 放大解算周期的分解三角形中,可得

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= k\Delta S_i \sin(\phi_i + \epsilon) \\ &= k \cos \epsilon \Delta S_i \sin \phi_i + k \sin \epsilon \Delta S_i \cos \phi_i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta Y_i &= k\Delta S_i \cos(\phi_i + \epsilon) \\ &= k \cos \epsilon \Delta S_i \cos \phi_i - k \sin \epsilon \Delta S_i \sin \phi_i \end{aligned} \quad (2)$$

相应地进行经度 γ_i 、纬度 λ_i 更新,累加实现航位推算

$$\gamma_i = \gamma_{i-1} + (\Delta X_i) / (N_{i-1} \cos \lambda_{i-1}) \quad (3)$$

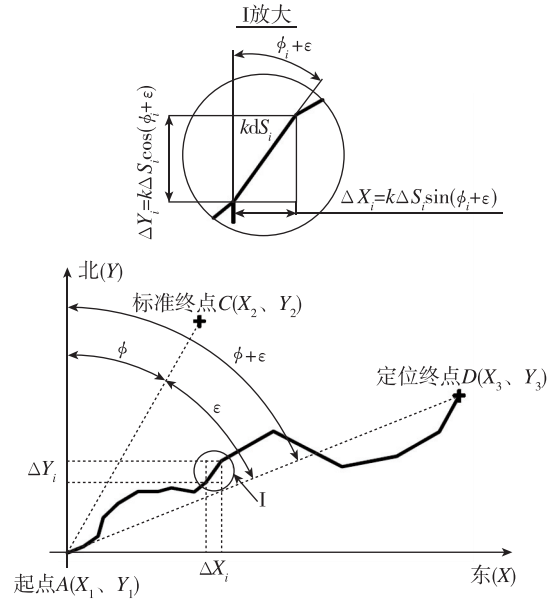


图 1 航位推算原理示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the position reckoning

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} + (\Delta Y_i) / R_{M_{i-1}} \quad (4)$$

式中, $N = a(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{1}{2}}$ 为卯酉圈曲率半径^[6-7]; $N \cos \lambda$ 为纬度 λ 对应纬度圈的半径; $R_M = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{-\frac{3}{2}}$ 为子午圈曲率半径; a 为椭球长半轴; e^2 为第一偏心率平方。

从标准起点出发,惯性解算终点累加公式如下

$$\begin{aligned} X_3 - X_1 &= \sum_{i=1}^n \Delta X_i = k \cos \epsilon \sum_{i=1}^n \Delta S_i \sin \phi_i + \\ & k \sin \epsilon \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cos \phi_i \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} Y_3 - Y_1 &= \sum_{i=1}^n \Delta Y_i = k \cos \epsilon \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cos \phi_i - \\ & k \sin \epsilon \sum_{i=1}^n \Delta S_i \sin \phi_i \end{aligned} \quad (6)$$

若不存在系统误差时,即 $k=1, \epsilon=0$, 得到标准终点-起点之间累加公式如下

$$X_2 - X_1 = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \sin \phi_i \quad (7)$$

$$Y_2 - Y_1 = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \cos \phi_i \quad (8)$$

1.2 可标性证明

把式(7)、式(8)代入式(5)、式(6)得

$$\begin{aligned} X_3 - X_1 &= k \cos \epsilon (X_2 - X_1) + k \sin \epsilon (Y_2 - Y_1) \\ &= k \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \sin(\phi + \epsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

$$Y_3 - Y_1 = k \cos \varepsilon (Y_2 - Y_1) - k \sin \varepsilon (X_2 - X_1)$$

$$= k \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \cos(\phi + \varepsilon) \quad (10)$$

式中, $\tan \phi = (X_2 - X_1)/(Y_2 - Y_1)$, ϕ 正好是图 1 中航迹 AC 与北向夹角。

将式(9)、式(10)两边平方后求和, 可得

$$k = \frac{\sqrt{(X_3 - X_1)^2 + (Y_3 - Y_1)^2}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}} \quad (11)$$

$$\text{式(9)、式(10)相除, 得 } \tan(\phi + \varepsilon) = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1},$$

则安偏角为

$$\varepsilon = \arctan \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} - \arctan \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \quad (12)$$

从式(9)、式(10)可以看出, 惯性定位的终点与行驶路径无关, 只与起终点坐标及系统存在的里程系数 k 及安偏角 ε 相关。使用式(11)、式(12)即可通过起终点坐标计算出系统误差 k 、 ε 。从图 1 可以得到 k 、 ε 的几何意义, k 为直线段长度之比 AD/AC , ε 为夹角 $\angle CAD$ 。

综上所述, 标定求解是将载车运动投影到平面中, 起终点直线连线进行计算。而使用墨卡托投影^[12-14]的平面直角坐标系中, 等角航线为直线, 可以借鉴等角航线的反解计算^[15-17]进行标定求解, 比较两等角航线的航程和航向角得到系统误差, k 为航程之比, ε 为航向角之差。

2 惯性定位系统误差标定计算

标定计算过程: 已知起点 A 经纬度 γ_1, λ_1 , 标准终点 C 经纬度 γ_2, λ_2 及惯性定位终点 D 经纬度 γ_3, λ_3 , 计算出 AC、AD 两等角航线航程和航向角, 比较即可得到安偏角及里程系数。

2.1 等角航线的航向角及航程计算

2.1.1 航向角及航程精确计算

(1) 航向角

如图 2 所示, 等角航线是椭球面上一条与经线保持同一角度的曲线, 航线与经线夹角即航向角, 设为 ϕ , 起点 A(经度 γ_1 、纬度 λ_1), 终点 C(经度 γ_2 、纬度 λ_2)。

图 2 的微分三角形中

$$dx = ds \sin \phi = N \cos \lambda d\gamma \quad (13)$$

$$dy = ds \cos \phi = R_M d\lambda \quad (14)$$

与航位推算的经度、纬度更新式(3)、式(4)解算周期无限小时一致。

对式(13)、式(14)进行积分变换, 可得

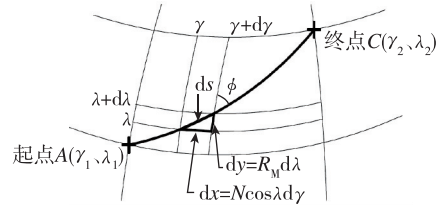


图 2 等角航线示意图

Fig. 2 Diagram of the rhumb line

$$\phi = \arctan \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{q(\lambda_2) - q(\lambda_1)} \quad (15)$$

其中, 记 $q(\lambda) = \int \frac{R_M}{N \cos \lambda} d\lambda$ 为等量纬度。

(2) 航程

等角航线的航程 S 在 $\phi \neq \pm 90^\circ$ (即 $\lambda_2 \neq \lambda_1$) 时用南北向航程 M (子午线弧长差) 除以航向角余弦而得, 在 $\phi = \pm 90^\circ$ (即 $\lambda_2 = \lambda_1$) 时使用纬度圈半径计算, 得

$$S = \begin{cases} \frac{1}{\cos \phi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_M d\lambda & \lambda_2 \neq \lambda_1 \\ N_1 \cos \lambda_1 (\gamma_2 - \gamma_1) & \lambda_2 = \lambda_1 \end{cases} \quad (16)$$

子午线弧长 $L(\lambda) = \int_0^\lambda R_M d\lambda$ 没有直接函数形式的解, 文献[18-20]进行了推导, 得到大地测量精度等级的精确解析解, 可以得到南北向航程 $M = L(\lambda_2) - L(\lambda_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_M d\lambda$ 。文献[17]中提到中分纬度圈半径 r_{λ_0} , 类比引入平均子午曲率半径 R_{C_0}

$$\begin{cases} S \sin \phi = r_{\lambda_0} (\gamma_2 - \gamma_1) \\ S \cos \phi = M = R_{C_0} (\lambda_2 - \lambda_1) \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$r_{\lambda_0} = \frac{\tan \phi}{\gamma_2 - \gamma_1} M = \frac{\tan \phi}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_M d\lambda$$

$$R_{C_0} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} M = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} R_M d\lambda$$

可得

$$\phi = \arctan \frac{r_{\lambda_0} (\gamma_2 - \gamma_1)}{R_{C_0} (\lambda_2 - \lambda_1)} \quad (18)$$

$$S = \sqrt{r_{\lambda_0}^2 (\gamma_2 - \gamma_1)^2 + R_{C_0}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2} \quad (19)$$

使用式(18)、式(19)可以对航向角和航程进行计算。式中 r_{λ_0} 、 R_{C_0} 对应着不同的纬度值, 计算过程较复杂。文献[21]提出了一种简化计算方式, 使用等量纬度差精确计算航向角, 使用平均纬度计算子午线弧长差, 在 150n mile 以内航程有 1m 精度。本文更进一步简化, 将式(18)、式(19)中 r_{λ_0} 、 R_{C_0} 近似为航程平均纬度点的纬度圈、子午圈曲率半径, 可在一定航程内获得满足精度要求的航向角和航程。

2.1.2 使用平均纬度计算航向角及航程

设平均纬度为 λ_0 , 式(18)、式(19)中 r_{λ_0} 、 R_{C_0} 近似为 $r_{\lambda_0} \approx N(\lambda_0)\cos(\lambda_0)$, $R_{C_0} \approx R_M(\lambda_0)$, 式(18)、式(19)变为使用平均纬度计算公式

$$\phi_0 = \arctan \frac{N(\lambda_0)\cos\lambda_0(\Delta\gamma)}{R_M(\lambda_0)(\Delta\lambda)} \quad (20)$$

$$S_0 = \sqrt{(N(\lambda_0)\cos\lambda_0\Delta\gamma)^2 + (R_M(\lambda_0)\Delta\lambda)^2} \quad (21)$$

式中, $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$, ϕ_0 、 S_0 为近似值, 设相应的误差为 E_ϕ 、 E_{S_0} 。

(1) 航向角计算及误差

使用式(20)计算航向角即是对等量纬度差 g 进行了简化计算。

$$\begin{aligned} q(\lambda_2) - q(\lambda_1) &\approx g_0 = \frac{R_M(\lambda_0)}{N(\lambda_0)\cos\lambda_0} \Delta\lambda \\ &= \left(\frac{1}{\cos\lambda_0} - \frac{e^2 \cos\lambda_0}{(1 - e^2 \sin^2\lambda_0)} \right) \Delta\lambda \quad (22) \end{aligned}$$

式中, g_0 为近似值, 设相应的误差为 E_g 。使用泰勒公式将等量纬度 $q(\lambda_2)$ 、 $q(\lambda_1)$ 以 λ_0 为基础展开到 2 次项并求差得

$$\begin{aligned} q(\lambda_2) - q(\lambda_1) &= \frac{R_M(\lambda_0)}{N(\lambda_0)\cos\lambda_0} (\Delta\lambda) + \frac{1}{6} (q^{(3)}(\lambda_0 + \\ &\quad \zeta(\Delta\lambda/2)) + q^{(3)}(\lambda_0 - \\ &\quad \nu(\Delta\lambda/2))) (\Delta\lambda/2)^3 \quad (23) \end{aligned}$$

式中, $0 < \zeta, \nu < 1$, $\lambda_2 - \lambda_0 = \lambda_0 - \lambda_1 = \Delta\lambda/2$ 。

航程较短(318km 以内, $\Delta\lambda \leq 0.05$) 可忽略 E_g 中高次项, 计算误差时 $\Delta\lambda \approx S_0 \cos\phi_0/a$, 忽略小量, 可得误差为拉格朗日余项差值

$$\begin{aligned} E_g &= \frac{1}{48} (\Delta\lambda)^3 (q^{(3)}(\lambda_0 + \zeta(\Delta\lambda/2)) + \\ &\quad q^{(3)}(\lambda_0 - \nu(\Delta\lambda/2))) \\ &\approx \frac{1}{24} q^{(3)}(\lambda_0) (S_0 \cos\phi_0/a)^3 \quad (24) \end{aligned}$$

忽略小量, 化简可得误差比例为

$$\begin{aligned} \frac{E_g}{g_0} &\approx \frac{1}{24} (\Delta\lambda)^2 (1 + 2 \tan^2\lambda_0) \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 \cos^2\phi_0 (1 + 2 \tan^2\lambda_0) \quad (25) \end{aligned}$$

带来的角度误差为

$$\begin{aligned} E_\phi &\approx E_g \phi^{(1)}(g_0) = -\frac{E_g}{2g_0} \sin(2\phi_0) \\ &\approx -\frac{1}{48} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 (1 + 2 \tan^2\lambda_0) \sin(2\phi_0) \cos^2\phi_0 \quad (26) \end{aligned}$$

(2) 航程计算及误差

使用式(21)计算航程即是对等量纬度差 g 、子午线弧长差 M 均进行了简化计算。

$$L(\lambda_2) - L(\lambda_1) \approx M_0 = R_M(\lambda_0)\Delta\lambda \quad (27)$$

式中, M_0 为近似值, 设相应的误差为 E_M 。

使用泰勒公式对子午线弧长 $L(\lambda_2)$ 、 $L(\lambda_1)$ 以 λ_0 为基础展开到 2 次项并求差得

$$\begin{aligned} L(\lambda_2) - L(\lambda_1) &= R_M(\lambda_0)(\Delta\lambda) + \\ &\quad \frac{1}{6} (q^{(3)}(\lambda_0 + \zeta(\Delta\lambda/2)) + \\ &\quad q^{(3)}(\lambda_0 - \nu(\Delta\lambda/2))) (\Delta\lambda/2)^3 \quad (28) \end{aligned}$$

式中, $0 < \zeta, \nu < 1$, $\lambda_2 - \lambda_0 = \lambda_0 - \lambda_1 = \Delta\lambda/2$ 。

航程较短可忽略 E_M 中高次项, 则误差为

$$\begin{aligned} E_M &= \frac{1}{48} (\Delta\lambda)^3 (L^{(3)}(\lambda_0 + \zeta(\Delta\lambda/2)) + \\ &\quad L^{(3)}(\lambda_0 - \nu(\Delta\lambda/2))) \\ &\approx \frac{1}{24} (\Delta\lambda)^3 L^{(3)}(\lambda_0) \quad (29) \end{aligned}$$

忽略小量, 化简可得误差比例为

$$\frac{E_M}{M_0} \approx \frac{e^2}{8} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 \cos(2\lambda_0) \cos^2\phi_0 \quad (30)$$

对二元函数 $S(\phi, M) = M/\cos\phi$ 在 M_0 、 ϕ_0 处进行泰勒展开, 航程较短时, 可忽略误差中高次项, 求得航程误差比例为

$$\begin{aligned} \frac{E_S}{S_0} &\approx \frac{E_M}{S_0 \cos\phi_0} + \frac{M_0 \sin\phi_0}{S_0 \cos^2\phi_0} E_\phi \\ &= \frac{E_M}{M_0} + (\tan\phi_0) E_\phi \quad (31) \end{aligned}$$

将式(26)、式(30)代入式(31)可得

$$\begin{aligned} \frac{E_S}{S_0} &\approx \frac{e^2}{8} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 \cos(2\lambda_0) \cos^2\phi_0 - \\ &\quad \frac{1}{96} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 (1 + 2 \tan^2\lambda_0) \sin^2(2\phi_0) \quad (32) \end{aligned}$$

误差中主要值为第二项, 再化简

$$\frac{E_S}{S_0} = -\frac{1}{96} \left(\frac{S_0}{a} \right)^2 (1 + 2 \tan^2\lambda_0) \sin^2(2\phi_0) \quad (33)$$

根据式(33)估算的误差, 55° 纬度, 277.8km (即 150n mile) 计算的误差绝对值最大为 28m (比例为 1×10^{-4}), 比文献[21]中给出的值大, 主要是因为使用式(21)计算航程对等量纬度差 g 亦进行了简化计算, 增加了航程计算误差。从式(32)可以看出, 对等量纬度差 g 进行简化计算带来的误差占主要部分。

根据式(26)、式(33), 在 55° 纬度, 90km 行驶距离, 带来的航程相对误差最大为 1×10^{-5} , 误差最大为 0.95m, 角度误差绝对值不超过 4.3"。

2.2 使用平均纬度标定计算及误差

2.2.1 计算公式

按照式(20)、式(21)分别计算 AD 、 AC 等角航

线的航向角及航程,航向角求差得标定计算的安偏角 A_p ,航程相除得标定计算的里程系数 X_s 。设 $\lambda_0 = (\lambda_2 + \lambda_1)/2$, $\lambda_D = (\lambda_3 + \lambda_1)/2$, 计算公式为

$$A_p = \arctan\left(\frac{N(\lambda_D)\cos\lambda_D(\gamma_3 - \gamma_1)}{R_M(\lambda_D)(\lambda_3 - \lambda_1)}\right) - \arctan\left(\frac{N(\lambda_0)\cos\lambda_0(\gamma_2 - \gamma_1)}{R_M(\lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \quad (34)$$

$$X_s = \frac{\sqrt{(N(\lambda_D)\cos\lambda_D(\gamma_3 - \gamma_1))^2 + (R_M(\lambda_D)(\lambda_3 - \lambda_1))^2}}{\sqrt{(N(\lambda_0)\cos\lambda_0(\gamma_2 - \gamma_1))^2 + (R_M(\lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1))^2}} \quad (35)$$

2.2.2 误差分析

使用式(20)、式(21)可以得到两条航线 AD 、 AC 航向角及航程,设 ϕ_D, S_D, ϕ_0, S_0 为计算值, $E_{\phi_D}, E_{S_D}, E_{\phi_0}, E_{S_0}$ 为计算的误差。

标定计算的安偏角

$$A_p = (\phi_D + E_{\phi_D}) - (\phi_0 - E_{\phi_0}) = (\phi_D - \phi_0) + (E_{\phi_D} - E_{\phi_0}) \quad (36)$$

将式(26)代入,估算误差时, $\phi_D - \phi_0 \approx \varepsilon$, $S_D/S_0 \approx k$,纬度取 λ_1 ,标定计算得到的 A_p 与设定的 ε 比较,得安偏角标定误差

$$A_p - \varepsilon \approx E_{\phi_D} - E_{\phi_0} \approx -\frac{1}{48}\left(\frac{S_0}{a}\right)^2 (1 + 2 \tan^2 \lambda_1) \cdot (k^2 \cos^2(\phi_0 + \varepsilon) \sin(2\phi_0 + 2\varepsilon) - \cos^2 \phi_0 \sin(2\phi_0)) \quad (37)$$

标定计算的里程系数 X_s

$$X_s = \frac{S_D + E_{S_D}}{S_0 + E_{S_0}} = \frac{S_D}{S_0} \frac{1 + E_{S_D}/S_D}{1 + E_{S_0}/S_0} \quad (38)$$

将式(33)代入,估算误差时, $\phi_D - \phi_0 \approx \varepsilon$, $S_D/S_0 \approx k$,忽略二阶小量,纬度取 λ_1 ,标定计算得到的 X_s 与设定的 k 比较,得里程系数标定误差

$$\frac{X_s - k}{k} \approx -\frac{1}{96}\left(\frac{S_0}{a}\right)^2 (1 + 2 \tan^2 \lambda_1) \cdot (k^2 \sin^2(2\phi_0 + 2\varepsilon) - \sin^2(2\phi_0)) \quad (39)$$

2.3 使用起点纬度进行标定计算及误差

2.3.1 计算公式

中精度车载惯性定位设备标定计算时常采用起点纬度值进行式(34)、式(35)的计算,即 $\lambda_0 = \lambda_D = \lambda_1$, 公式变为

$$A_p = \arctan\left(\frac{N(\lambda_1)\cos\lambda_1(\gamma_3 - \gamma_1)}{R_M(\lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)}\right) - \arctan\left(\frac{N(\lambda_1)\cos\lambda_1(\gamma_2 - \gamma_1)}{R_M(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)}\right) \quad (40)$$

$$X_s = \frac{\sqrt{(N(\lambda_1)\cos\lambda_1(\gamma_3 - \gamma_1))^2 + (R_M(\lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1))^2}}{\sqrt{(N(\lambda_1)\cos\lambda_1(\gamma_2 - \gamma_1))^2 + (R_M(\lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1))^2}} \quad (41)$$

2.3.2 误差分析

类比 2.1.2 节的分析,可得

$$E_{\phi} \approx -0.25(S_0/a) \tan\lambda_1 \sin(2\phi_0) \cos\phi_0 \quad (42)$$

$$E_S/S_0 \approx -0.25(S_0/a) \tan\lambda_1 \sin(2\phi_0) \sin\phi_0 \quad (43)$$

可得安偏角标定计算误差

$$A_p - \varepsilon \approx 0.25(S_0/a) \tan\lambda_1 \cdot (k \sin(2\phi_0 + 2\varepsilon) \cos(\phi_0 + \varepsilon) - \sin(2\phi_0) \cos\phi_0) \quad (44)$$

可得里程系数标定计算误差

$$\frac{X_s - k}{k} \approx 0.25(S_0/a) \tan\lambda_1 \cdot (k \sin(2\phi_0 + 2\varepsilon) \sin(\phi_0 + \varepsilon) - \sin(2\phi_0) \sin\phi_0) \quad (45)$$

3 仿真分析

3.1 惯性定位航位推算流程

惯性定位的航位推算流程如图 3 所示。

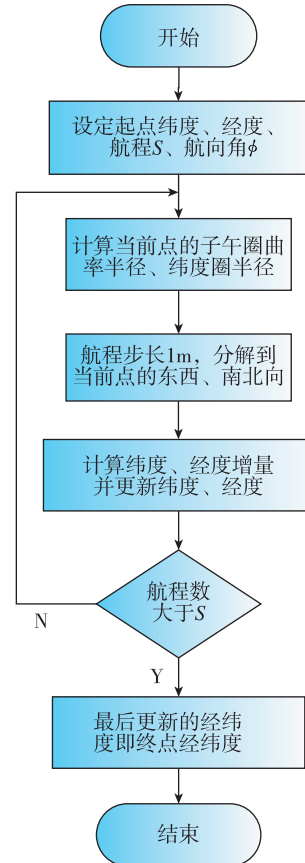


图 3 惯性定位航位推算流程图

Fig. 3 Inertial location flow chart of position reckoning

3.2 使用平均纬度标定计算误差仿真

设定航向角,航程按照图 3 流程分别计算得到标准点及含系统误差的惯性定位输出点经纬度,按照前面的标定计算公式计算出惯性定位输出包含的系统误差。

设定 $k=1.2, \epsilon=92.5^\circ$, 计算不同航向角下的安偏角和里程系数的标定误差,并与式(28)、式(29)计算比较,绘制如图 4 所示,可见公式能准确估算误差:安偏角不大于 $0.1''$, 里程系数不大于 5×10^{-7} 。

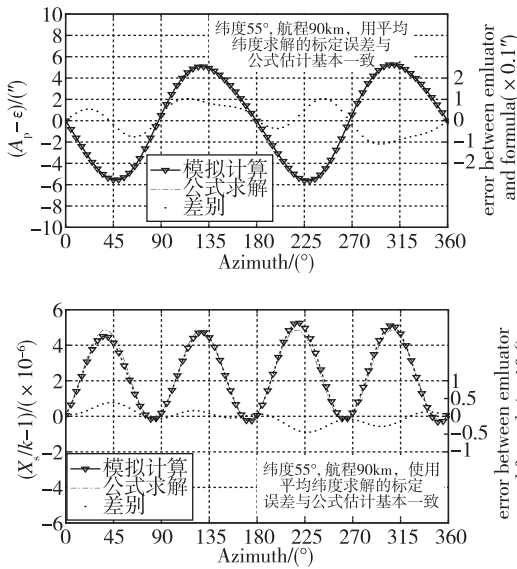


图 4 使用平均纬度求解标定误差仿真
Fig. 4 Simulation of calibration errors with mean latitude

采用计算机仿真计算,起点 A 纬度 55° 、经度 110° 。设定不同的里程系数 k 及安偏角 ϵ 组合,计算不同航向角下的标定值误差,结果如图 5 所示。安偏角标定误差不超过 $7''$, 里程系数标定误差不超过 1.5×10^{-5} 。

3.3 使用起点纬度标定计算误差仿真

设定 $k=1.2, \epsilon=92.5^\circ$ (航程变为 10km), 计算不同航向角下的安偏角和里程系数的标定误差,与式(44)、式(45)计算比较,绘制如图 6 所示,可见公式能准确估算误差:安偏角不大于 $1''$, 里程系数不大于 1×10^{-5} 。

不同设置值模拟计算绘制系列如图 7 所示。角度误差最大到 $180''$, 里程系数误差最大达 9×10^{-4} , 在 $\epsilon \approx 90^\circ$ 时求解误差大。

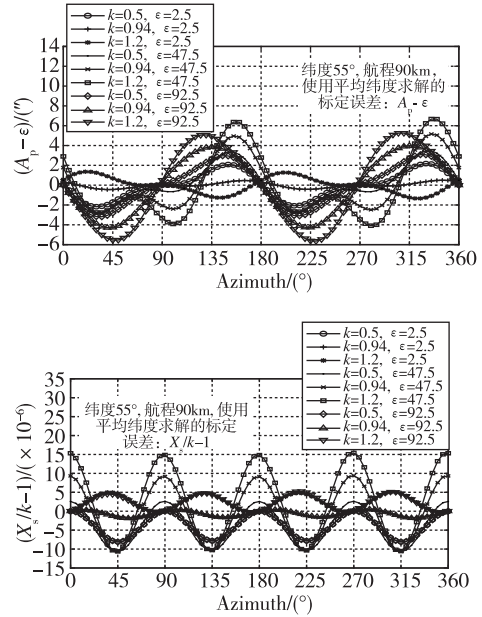


图 5 使用平均纬度进行标定计算误差
Fig. 5 Calibration errors calculated using the mean latitude

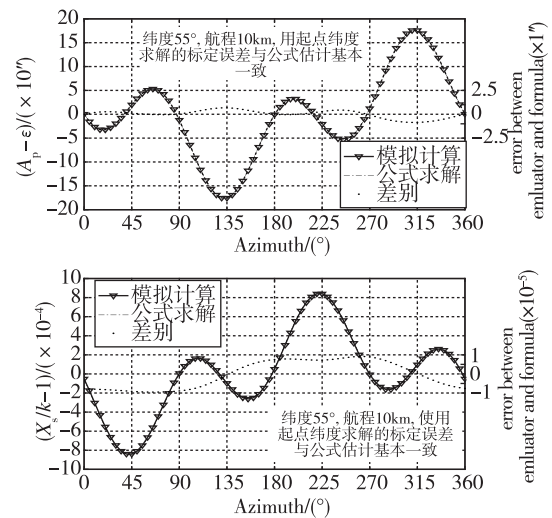
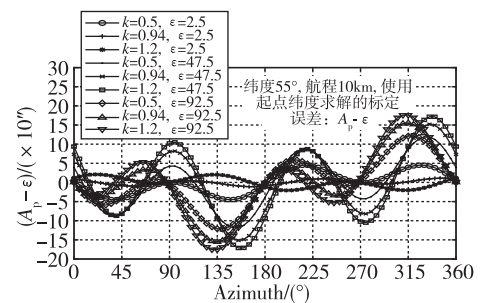


图 6 理论公式与模拟计算标定误差对比
Fig. 6 Comparison of calibration errors between the theoretical formula and the simulation calculation



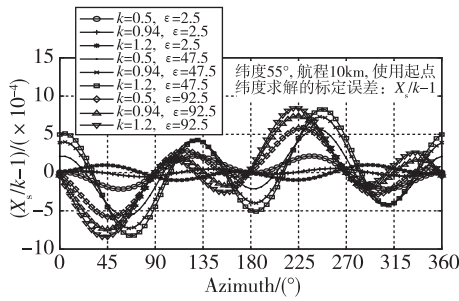


图7 使用起点纬度求解的标定误差

Fig. 7 Calibration errors calculated using the start latitude

在 $\epsilon \approx 0^\circ$ 附近模拟计算系列如图 8 所示。安偏角求解误差不大于 $50''$ ，里程系数求解误差不大于 2.5×10^{-4} 。

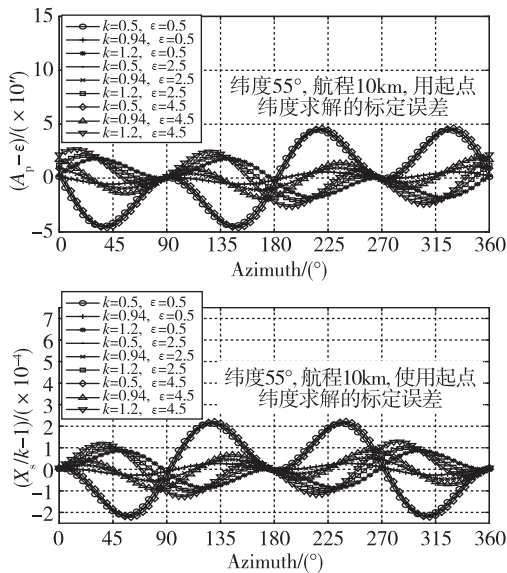


图8 安偏角小时使用起点纬度的标定误差

Fig. 8 Calibration errors calculated using the start latitude with a small installation deviation angle

在进行标定试验时，若使用起点纬度进行标定计算，可根据惯性定位设备的安装情况，估计并设定安偏角初值，使进行航位推算时的实际安偏角在 0° 附近，或者进行标定迭代试验，减少该方法的标定误差。

4 结论

本文通过借鉴等角航线的理论得出使用平均纬度进行标定计算的公式，并推导出误差公式，可得以下结论：

1) 仿真结果表明，该方法标定在南北纬不大于 55° ，90km 航程以内安偏角标定误差不超过 $6''$ ，里

程系数标定误差不超过 1.5×10^{-5} 。若在更长的行程下可使用本文的公式进行误差估计。

2) 使用起点纬度法进行标定求解的误差较大，只能在更短的航程以及安偏角较小时使用，安偏角较大时则需在估计初值的前提下使用。

3) 基于本文的理论，航位推算的纬度经度更新使用起点纬度计算的曲率半径，在高纬度、较大步长时会损失定位精度，后续将进一步开展研究。

参考文献

- [1] 谢波, 秦永元, 万彦辉. 一种车载定位定向系统误差补偿方法[J]. 计算机测量与控制, 2011, 19(4): 943-946.
Xie Bo, Qin Yongyuan, Wan Yanhui. A error compensation method of position and azimuth determining system for land vehicle[J]. Computer Measurement and Control, 2011, 19(4): 943-946(in Chinese).
- [2] Tsuji R, Endo T, Yoshida H, et al. Development of position measurement unit for flying inertial fusion energy target[J]. Journal of Physics Conference, 2016, 688(1): 1-4.
- [3] 严涛, 王跃钢, 杨波, 等. 陆用车载组合导航系统里程仪快速标定[J]. 电子设计工程, 2011, 19(19): 77-79.
Yan Tao, Wang Yuegang, Yang Bo, et al. A fast calibration of odometer for land vehicle navigation system[J]. Electronic Design Engineering, 2011, 19(19): 77-79(in Chinese).
- [4] Fong W T, Ong S K, Nee A Y C. Methods for in-field user calibration of an inertial measurement unit without external equipment[J]. Measurement Science and Technology, 2008, 19(8): 817-822.
- [5] 全永, 彬朱静. 基于惯性传感器和视觉传感器的室内定位研究[J]. 东莞理工学院学报, 2019, 26(1): 91-95.
Quan Yong, Bin Zhuqing. Research on indoor positioning based on visual and inertial sensors[J]. Journal of Dongguan University of Technology, 2019, 26(1): 91-95(in Chinese).
- [6] Metge J, Mégret R, Giremus A, et al. Calibration of an inertial-magnetic measurement unit without external equipment, in the presence of dynamic magnetic disturbances[J]. Measurement Science and Technology, 2014, 25(12): 1-16.
- [7] 赵长山, 秦永元, 夏家和. 车载惯导里程仪组合导航系统安装误差标定研究[J]. 计算机测量与控制, 2008, 16(10): 1393-1395.

- Zhao Changshan, Qin Yongyuan, Xia Jiahe. On SINS installation error calibration of a multimode vehicular navigation system[J]. *Computer Measurement and Control*, 2008, 16(10): 1393-1395(in Chinese).
- [8] Abou-Galala M, Rabah M, Kaloop M, et al. Assessment of the accuracy and convergence period of precise point positioning[J]. *Alexandria Engineering Journal*, 2018, 57(3): 1721-1726.
- [9] 孙铭, 周琪, 崔潇, 等. 捷联惯导/航位推算组合导航算法研究[J]. *电子设计工程*, 2013, 21(15): 11-14.
- Sun Ming, Zhou Qi, Cui Xiao, et al. Research on SINS/DR integrated navigation system algorithm[J]. *Electronic Design Engineering*, 2013, 21(15): 11-14 (in Chinese).
- [10] Kotsakis C. Overparameterized least-squares adjustment with linear models for geodetic and surveying applications [J]. *Journal of Surveying Engineering*, 2006, 132(4): 135-140.
- [11] 姚兴太. 惯性导航系统定位精度与试验路径的关系 [J]. *火炮发射与控制学报*, 2007(4): 27-29.
- Yao Xingtai. Relationship between location precision of inertia navigation system and test path form[J]. *Journal of Gun Launch & Control*, 2007(4): 27-29 (in Chinese).
- [12] 刘大海, 申自立. 大地主题常微分方程组解算的数值方法以 MathCAD 为工具[J]. *北京测绘*, 2018, 32(5): 516-523.
- Liu Dahai, Shen Zili. Numerical method for solving ordinary differential equations of geodetic problem using the tool MathCAD[J]. *Beijing Surveying and Mapping*, 2018, 32(5): 516-523(in Chinese).
- [13] López Y, Narciandi G L, Andrés F L H. Sensor network and inertial positioning hybridisation for indoor location and tracking applications [J]. *International Journal of Sensor Networks*, 2017, 24(4): 242-252.
- [14] 何冰, 王小亚, 王家松. 多种空间大地测量技术内综合方法研究及精度分析[J]. *天文学进展*, 2018, 36(2): 189-204.
- He Bing, Wang Xiaoya, Wang Jiasong. Method research and accuracy analysis on the intra-technique combination from various space geodetic techniques [J]. *Progress in Astronomy*, 2018, 36(2): 189-204 (in Chinese).
- [15] Nazarahari M, Noamani A, Ahmadian N, et al. Sensor-to-body calibration procedure for clinical motion analysis of lower limb using magnetic and inertial measurement units [J]. *Journal of Biomechanics*, 2019, 85: 224-229.
- [16] 陈浩, 吴迪, 李厚朴. 关于等角航线的航迹计算公式及改进[J]. *海洋测绘*, 2018, 38(1): 67-70.
- Chen Hao, Wu Di, Li Houpu. Mercator rhumb line track calculation formula and its improvement[J]. *Hydrographic Surveying and Charting*, 2018, 38(1): 67-70(in Chinese).
- [17] 丁佳波. 关于地球椭圆体面上等角航线解算的实用公式[J]. *中国航海*, 2005(1): 74-76.
- Ding Jiabo. Practicable formula of the conformal course solution on the earth ellipsoid[J]. *Navigation of China*, 2005(1): 74-76(in Chinese).
- [18] Stein N, Weiss H, Hexner G, et al. Effect of missile configuration and inertial measurement unit location on autopilot response[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2016, 39(12): 2740-2745.
- [19] 田红亮, 朱大林, 秦红玲. 中国大地坐标系地球旋转椭圆子午线弧长的严密精确解[J]. *三峡大学学报(自然科学版)*, 2012, 34(4): 81-85.
- Tian Hongliang, Zhu Dalin, Qin Hongling. Exact rigorous solution for earth rotating ellipsoid meridian arc length in China geodetic coordinate system[J]. *Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences)*, 2012, 34(4): 81-85(in Chinese).
- [20] 过家春, 赵秀侠, 徐丽, 等. 基于第二类椭圆积分的子午线弧长公式变化及解算[J]. *大地测量与地球动力学*, 2011, 31(4): 94-98.
- Guo Jiachun, Zhao Xiuxia, Xu Li, et al. Calculating meridian arc length by transforming its formulae into elliptic integral of second kind[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2011, 31(4): 94-98(in Chinese).
- [21] 李宏利. 论等角航线的正反解[J]. *中国航海*, 1989(1): 47-52.
- Li Hongli. On the solution and inverse of rhumb line[J]. *Navigation of China*, 1989(1): 47-52(in Chinese).

(编辑:孟彬)