

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2024.06.004

融合引导搜索与渐次优化的双轴铰接式 车辆狭窄空间运动规划方法

李岱伟^{1,2}, 高亮^{1,2}, 贾博铂^{1,2}, 谢杉杉^{1,2}, 杨毅^{1,2}, 付梦印^{1,2,3}

- 北京理工大学自动化学院, 北京 100081;
- 北京理工大学自主智能无人系统全国重点实验室, 北京 100081;
- 南京理工大学自动化学院, 南京 210094)

摘要: 铰接式车辆(AAV)由一辆动力牵引车与几辆无动力挂车组成, 车辆在狭窄空间中运动时, 挂车数量增多将导致避碰约束规模增加, 并降低铰接式车辆运动规划任务的实时性。为此, 提出了一种引导搜索与渐次优化相融合的铰接式车辆运动规划方法。首先, 推导了双轴铰接式车辆通用运动学模型与规划任务约束条件; 其次, 考虑环境特性与铰接式车辆行为特征, 对经典混合A*算法进行改进, 引导搜索方向向目标节点扩展, 从而生成符合铰接式车辆运动特性的初始路径; 最后, 以初始路径为热启动参考解, 采用内点法(IPM)进行优化, 将障碍物尺寸收缩后渐次扩展至原尺寸, 并构建一系列避碰约束子问题以加速求解过程。仿真实验结果表明, 引导搜索算法在拖曳不同级数挂车时均能够将求解效率提升40%~50%, 且生成路径平滑性更优; 渐次优化算法可通过减少引导搜索算法生成初始解中存在的小幅后向运动与航向角突变, 以提升路径质量。

关键词: 运动规划; 铰接式车辆; 狭窄空间; 混合A*算法; 内点法

中图分类号: TP242.6

文献标志码: A

文章编号: 2095-8110(2024)06-0047-14

Motion planning for two-axle articulated autonomous vehicle in narrow space with integration of guided search and progressive optimization

LI Daiwei^{1,2}, GAO Liang^{1,2}, JIA Bobo^{1,2}, XIE Shanshan^{1,2}, YANG Yi^{1,2}, FU Mengyin^{1,2,3}

- School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
- National Key Lab of Autonomous Intelligent Unmanned Systems, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
- School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Articulated autonomous vehicle (AAV) consists of a powered tractor and several unpowered trailers. When the AAV maneuvers in narrow space, the increment of trailer amount leads to an increase in the scale of the collision avoidance constraints, and reduces the real-time capability of the motion planning tasks. To address this, an AAV motion planning method that combines guided search and progressive optimization is proposed. Firstly, the general kinematic model and planning task constraints for a two-axle AAV are derived. Secondly, the classical hybrid A* algo-

收稿日期: 2024-08-02; 修订日期: 2024-09-19

基金项目: 国家重点研发计划(2022YFC2603600); 国家自然科学基金(62233002)

作者简介: 李岱伟(1999—), 男, 硕士研究生, 主要从事地面无人平台运动规划方面的研究。

通信作者: 杨毅(1979—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事跨域交叉混合智能协同感知、陆上无人系统自主导航及新构型移动机器人设计与控制方面的研究。

rithm is improved by considering the characteristics of the environment and the AAV behaviour, and the initial path that matches the characteristics of the AAV motion is generated by guiding the search direction towards the target node. Finally, the interior point method (IPM) is used for the optimization, with the initial path used as the reference solution for the warm start. After shrinking the obstacle size, it is gradually expanded to the original size, and a series of collision avoidance constraint subproblems are constructed to speed up the solving process. Simulation experiment results show that the guided search algorithm can improve the planning efficiency by 40%~50% when towing different amount of trailers, and the smoothness of the generated path is better. The progressive optimization algorithm can improve the path quality by mitigating the small amount of backward maneuver and sudden changes of heading angle in the initial solution generated by the guided search algorithm.

Key words: Motion planning; Articulated autonomous vehicle (AAV); Narrow environment; Hybrid A* algorithm; Interior point method (IPM)

0 引言

随着我国社会经济的持续快速发展, 铰接式车辆在交通运输、园区物流等场景中应用日益广泛^[1], 智能化、无人化铰接式车辆将成为推动智慧交通和智慧物流实现的重要载体。铰接式车辆一般由一辆动力牵引车与几辆无动力挂车组成, 各级车体通过铰链固连, 具有不同于常见刚体车辆的柔性特征。较之刚体车辆, 铰接式车辆具有以下优势: 1) 拖挂级数可根据任务需要灵活调整; 2) 货运能力强, 运输效率高; 3) 与同尺寸刚体车辆相比, 其转弯半径更小, 在工厂、园区等狭窄或障碍物密集环境中机动性更强。然而, 与刚体乘用车相比, 铰接式车辆运动规划任务难度更大, 挂车的运动状态将对牵引车产生影响, 且各级车体可能因运动状态不一致而发生内部碰撞, 进而陷入不可恢复的折叠状态, 即“折叠刀(jackknife)”状态。因此, 有必要对铰接式车辆运动规划方法进行研究, 以实现铰接式车辆安全自主行驶。

与乘用车运动规划类似, 铰接式车辆运动规划算法可分为四大类: 图搜索、随机采样、曲线插值及数值优化。图搜索算法将状态空间表示为占据栅格或状态晶格, 通过遍历状态空间生成从起始点到目标点的路径^[2]。Rimmer等^[3]使用Dijkstra算法求解双级挂车的无碰撞可行路径。Ljungqvist等^[4]提出了一种用于双级挂车的状态晶格规划算法, 通过离线预设运动学可行的运动基元与参数化晶格以加快搜索速度。随机采样方法通过对构型空间或状态空间进行路径点采样, 生成能够连接起始点与目标点、且不与障碍物发生碰撞的路径。在铰接

式车辆运动规划研究中, 快速搜索随机树(rapidly-exploring random tree, RRT)算法使用最为广泛, 但随着铰接式车辆状态维度的增加, RRT计算效率有所降低。对此, 有学者进一步提出了能够提高碰撞检测速度与采样质量的闭环RRT(closed-loop RRT, CL-RRT)^[5]以及融合非完整性约束与角度搜索的Theta*-RRT^[6]等RRT变种算法, 以提升铰接式车辆运动规划效率。此外, 通过图搜索或随机采样规划出的路径往往无法被车辆直接执行, 需进行适当平滑处理^[7]。曲线插值方法在已有路径点的基础上, 根据车辆约束与周围环境拟合出更为平滑的运动路径。Yue等^[8]基于时间的五次多项式函数, 提出了一种铰接式车辆换道轨迹规划。Ghilar-delli等^[9]提出了基于 η^4 样条的九阶多项式曲线, 通过调整8个参数以修改路径形状。数值优化方法通过构建车辆运动学或动力学方程, 并添加必要约束条件及优化指标, 构建了一个最优控制问题(optimal control problems, OCP), 并将其离散化为非线性规划(non-linear programming, NLP)问题进行求解。Li等^[10]以边值约束与避碰约束为条件, 基于内点法求解铰接式车辆的最短时间轨迹规划问题, 并进一步将该方法应用于铰接式车辆狭窄空间轨迹规划。Oliveira等^[11]将优化指标定义为曲率突变与牵引车、挂车横向误差的加权求和最小值, 采用序贯二次规划生成铰接式车辆行驶轨迹, 使车辆尽可能保持在道路中心行驶。然而, 在铰接式车辆运动规划中, 随着挂车数量增加, 运动学约束与避碰约束更为复杂, 对快速生成路径可行解与最优解提出了挑战。为平衡最优性与实时性, 可借助其他方

法首先生成初始解,再通过数值优化方法使其收敛至最优解,计算速度将显著提高^[12]。很多研究开始关注多方法融合以提高算法实时性,包括混合 A*^[13]、状态晶格^[14]、Bezier 曲线^[15]及样条曲线^[16]等方法均被用于与数值优化方法进行融合。

在铰接式车辆运动规划中,采用“先求初始解,再收敛至最优解”的思路,因能在提升生成解质量的同时加速求解而受到关注。然而,这一思路虽然能够加快求解速度,但与应用到实车仍有较大差距。因此,进一步提升求解实时性是该领域未来的重点研究方向。本文提出了一种融合引导搜索与渐次优化的铰

接式车辆狭窄空间运动规划方法,以提升铰接式车辆规划效率与生成路径质量。文中各章节主要内容如图 1 所示。第 1 章构建了双轴铰接式车辆运动规划任务模型,包括能够表征任意级数、不同构型铰接式车辆的通用运动学模型,以及包含机械约束、边值约束及避碰约束的运动规划任务约束条件;第 2 章结合铰接式车辆运动特性,提出了基于引导搜索的铰接式车辆狭窄空间运动规划方法,并针对引导搜索算法生成路径为次优解的问题,提出了基于渐次优化的路径优化方法,以提升生成路径质量;第 3 章对本文算法进行了仿真实验,以验证算法性能。

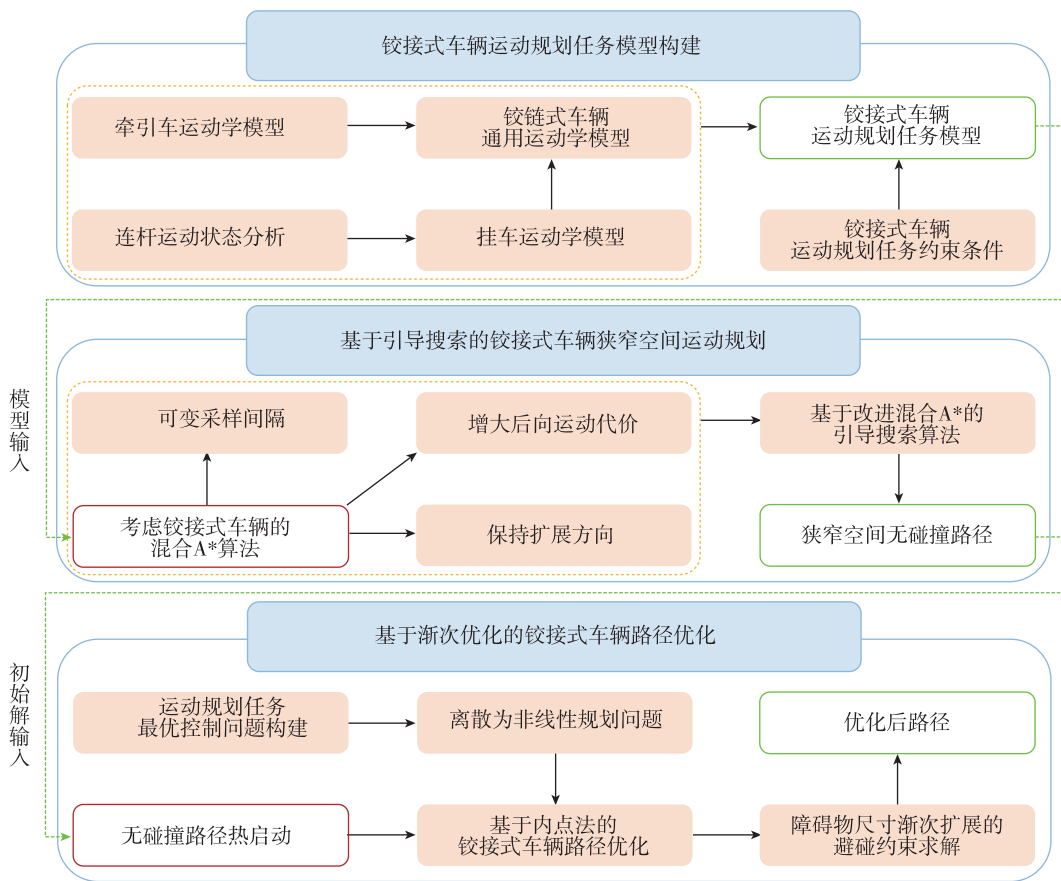


图 1 内容框架

Fig. 1 Framework

1 铰接式车辆运动规划任务模型

本章针对现有研究中铰接式车辆构型差异导致欠缺通用性的问题,构建了双轴欠驱动铰接式车辆运动规划任务模型,包括能够表征任意级数、不同构型铰接式车辆的通用运动学模型,以及包含机械约束、边值约束及避碰约束的运动规划任务约束条件。

1.1 铰接式车辆运动学模型

对于铰接式车辆系统,牵引车是系统唯一动力来源,且符合阿克曼转向机制。铰接式车辆运动学模型如图 2 所示。由于铰接式车辆工作时需装载大量载荷,为确保其安全性,车辆在狭窄空间中仅进行低速运动,故此时可忽略运动过程中的滑移,且满足非完整性约束。类似于二自由度乘用车运动学模型,牵引车受运动学约束如式(1)所示。

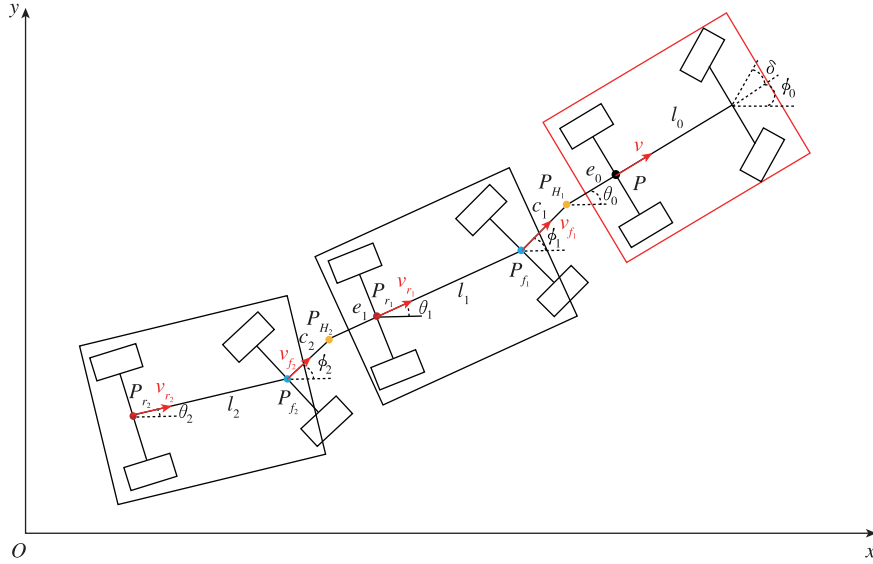


图2 铰接式车辆运动学模型

Fig. 2 Kinematic model of AAV

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta}_0 \\ \dot{v} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot \cos\theta_0 \\ v \cdot \sin\theta_0 \\ v \cdot \tan\delta/l_0 \\ a \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $P(x_0, y_0)$ 为牵引车后轴中心点; v 为牵引车后轴中心处速度; θ_0 为牵引车航向角, 以逆时针转动为正; δ 为牵引车前轮偏角, 以左偏为正; l_0 为牵引车前后轮轴距。

铰接式车辆各级挂车行驶路径与牵引车不一致, 且各级挂车间行驶路径亦不一致, 为了实现在狭窄空间中的安全行驶, 在运动规划任务中, 需获取各级挂车运动状态(后轴中心点位置、速度及航向角等)。任意一级挂车均可抽象为 3 个相互连接的刚体连杆: 连接前车后轴中心点 $P_{r_{i-1}}$ 与铰接点 P_{H_i} 的连杆 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 、连接铰接点 P_{H_i} 与挂车前轴中心点 P_{f_i} 的连杆 $P_{H_i}P_{f_i}$ 以及连接挂车前轴中心点 P_{f_i} 与挂车后轴中心点 P_{r_i} 的连杆 $P_{f_i}P_{r_i}$ 。据此, 可对各级挂车运动状态进行推导^[17]。

1.1.1 挂车位置

首先推导第一级挂车后轴中心点与牵引车后轴中心点关系, 如式(2)所示。

$$\begin{cases} x_{r_1} = x_0 - e_0 \cos\theta_0 - c_1 \cos\phi_1 - l_1 \cos\theta_1 \\ y_{r_1} = y_0 - e_0 \sin\theta_0 - c_1 \sin\phi_1 - l_1 \sin\theta_1 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $P_{r_1}(x_{r_1}, y_{r_1})$ 为第一级挂车后轴中心点; e_0 为牵引车后轴中心点到铰接点的距离; c_1 为铰接点

到挂车前轴中心点的距离; l_1 为挂车前后轮轴距; ϕ_1 和 θ_1 分别为挂车前轴与后轴航向角, 以逆时针转动为正。

进一步地, 第 i ($i=1, 2, \dots, n$) 级挂车后轴中心点 $P_{r_i}(x_{r_i}, y_{r_i})$ 与牵引车后轴中心点的关系如式(3)所示。

$$\begin{cases} x_{r_i} = x_0 - \sum_{m=0}^i e_m \cos\theta_m - \sum_{n=1}^i c_n \cos\phi_n - \sum_{k=1}^i l_k \cos\theta_k \\ y_{r_i} = y_0 - \sum_{m=0}^i e_m \sin\theta_m - \sum_{n=1}^i c_n \sin\phi_n - \sum_{k=1}^i l_k \sin\theta_k \end{cases} \quad (3)$$

其中, e_i 为第 $i-1$ 级挂车后轴中心点到铰接点的距离; c_i 为铰接点到第 i 级挂车前轴中心点的距离; l_i 为第 i 级挂车前后轮轴距; ϕ_i 和 θ_i 分别为第 i 级挂车前轴与后轴航向角, 以逆时针转动为正。

1.1.2 挂车后轴速度

第 i 级挂车后轴中心点速度可由铰接点速度和前轴中心点速度递推而得。

1) 铰接点 P_{H_i} 处速度。对于第 i 级挂车, 若已知第 $i-1$ 级挂车后轴速度 $v_{r_{i-1}}$ 与航向角 θ_{i-1} , 由于忽略横向及侧向滑移, 故其速度方向沿刚体 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 。将 P_{H_i} 处速度分解为平行于 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 的分量 v_{H_e} 及垂直于 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 的分量 v_{H_t} , 由于刚体上两点间不存在相对运动趋势, 故平行于 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 的速度分量大小如式(4)所示。

$$v_{H_e} = v_{r_{i-1}} \quad (4)$$

刚体 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 的运动可分解为平动与转动, 由于 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 与挂车后轴固连, $P_{r_{i-1}}$ 只具有平动趋

势,故刚体 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 以 $P_{r_{i-1}}$ 为轴,做转动速率为 $\dot{\theta}_{i-1}$ 的定轴转动,则垂直于 $P_{r_{i-1}}P_{H_i}$ 的速度分量大小如式(5)所示。

$$v_{H_i} = \dot{\theta}_{i-1} \overline{P_{r_{i-1}}P_{H_i}} = \dot{\theta}_{i-1} e_{i-1} \quad (5)$$

2)前轴中心点 P_{f_i} 处速度。对于刚体 $P_{H_i}P_{f_i}$,由于其与挂车前轴固连, P_{f_i} 不具有横向运动趋势,且刚体上两点间不存在相对运动趋势,故其速度方向平行于 $\overline{P_{H_i}P_{f_i}}$,大小为 $v_{f_i} = v_{H_i}$ 。因此,将 P_{H_i} 处两速度分量分别向 $\overline{P_{H_i}P_{f_i}}$ 方向投影,可得挂车前轴速度 v_{f_i} ,如式(6)所示。

$$v_{f_i} = v_{H_i} \cos(\phi_i - \theta_{i-1}) + v_{H_i} \sin(\phi_i - \theta_{i-1}) \quad (6)$$

3)后轴中心点 P_{r_i} 处速度。对于刚体 $P_{f_i}P_{r_i}$,由于其与挂车两轴固连, P_{r_i} 不具有横向运动趋势,且刚体上两点间不存在相对运动趋势,故其速度方向平行于 $\overline{P_{f_i}P_{r_i}}$,大小为挂车前轴速度 v_{f_i} 在 $\overline{P_{f_i}P_{r_i}}$ 方向上的投影,即挂车后轴速度,如式(7)所示。

$$v_{r_i} = v_{f_i} \cos(\phi_i - \theta_i) \quad (7)$$

将式(4)~式(6)代入式(7),可得

$$v_{r_i} = [v_{r_{i-1}} \cos(\phi_i - \theta_{i-1}) + \dot{\theta}_{i-1} e_{i-1} \sin(\phi_i - \theta_{i-1})] \cos(\phi_i - \theta_i) \quad (8)$$

1.1.3 挂车后轴航向角

对于第 i 级挂车,刚体 $P_{f_i}P_{r_i}$ 的瞬时自旋角速度如式(9)所示。

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \frac{v_{f_i} \sin(\phi_i - \theta_i)}{\overline{P_{f_i}P_{r_i}}} \\ &= \frac{[v_{r_{i-1}} \cos(\phi_i - \theta_{i-1}) + \dot{\theta}_{i-1} e_{i-1} \sin(\phi_i - \theta_{i-1})] \sin(\phi_i - \theta_i)}{l_i} \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)积分即可得挂车后轴航向角。

综上,式(3)、式(8)及式(9)即为挂车运动学模型,该模型可用于表征任意级数、不同构型的铰接式车辆。 $e_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时,铰接点与后轴中心不重合,可表征全挂车; $e_i = 0$ 时,铰接点与后轴中心重合,可表征半挂车。

1.2 规划任务约束条件

铰接式车辆运动过程中受自身及环境约束,主要包括:车辆内在运动能力限制,即机械约束;车辆初始及终止时刻运动状态,即边值约束;车辆运动过程中避免与环境障碍物发生碰撞,即避碰约束。

1.2.1 机械约束

对于牵引车,其固有机械特性决定了行驶过程

中部分状态量与控制量的容许空间,如式(10)所示。

$$\begin{cases} |v(t)| \leq v_{\max} \\ |a(t)| \leq a_{\max} \\ |\delta(t)| \leq \delta_{\max} \\ |\omega(t)| \leq \omega_{\max} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $t \in [0, T]$, T 为规划任务终止时刻; $[v_{\max}, a_{\max}, \delta_{\max}, \omega_{\max}]$ 分别为牵引车速度、加速度、前轮偏角及前轮偏转角速度上界。

对于挂车,为避免系统陷入“折叠刀”状态,相邻两挂车间航向角之差应设一阈值,差值小于该阈值时,可视为系统处于稳态,如式(11)所示。

$$|\theta_i(t) - \theta_{i-1}(t)| \leq \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (11)$$

其中, α 为防弯折裕量,其值取决于车辆运动能力。

1.2.2 边值约束

对于铰接式车辆,应在规划任务开始时刻 ($t=0$) 指定其运动状态,包括牵引车初始运动状态与各级挂车初始航向角,如式(12)所示。

$$[x_0(0), y_0(0), v(0), a(0), \omega(0), \delta(0), \theta_i(0)] = [x_0, y_0, v_0, a_0, \omega_0, \delta_0, \theta_{i0}] \quad (12)$$

在任务终止时刻 ($t=T$), 系统应稳定停止在指定区域,即牵引车速度、加速度及前轮偏转角速度均应为 0,如式(13)所示。

$$[v(T), a(T), \omega(T)] = [0, 0, 0] \quad (13)$$

此外,若为各级车体指定精确停泊位姿,将极大增加求解难度,可能导致系统为满足目标点位姿约束在其附近反复进行正向与后向机动。因此,当各级车体实际位姿与指定位姿的差值小于某一阈值时,即视为规划任务成功,如式(14)所示。

$$\begin{cases} |x_i(T) - x'_i(T)| \leq \epsilon_1 \\ |y_i(T) - y'_i(T)| \leq \epsilon_2 \\ |\phi_i(T) - \phi'_i(T)| \leq \epsilon_3 \\ |\theta_i(T) - \theta'_i(T)| \leq \epsilon_4 \end{cases} \quad (14)$$

其中, $[x_i(T), y_i(T), \phi_i(T), \theta_i(T)]$ 为各级车体指定停泊位姿; $[x'_i(T), y'_i(T), \phi'_i(T), \theta'_i(T)]$ 为各级车体实际停泊位姿; $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4]$ 为位姿偏差容许阈值。

1.2.3 避碰约束

铰接式车辆运动过程中应确保不与障碍物发生碰撞,因此需在任务时域 $[0, T]$ 内满足:1)铰接式车辆各级车体的 4 个顶点均不与障碍物相交;2)障碍物的每个顶点均不与铰接式车辆各级车体相交,如式(15)所示。

$$\begin{cases} Veh_i \cap Area_{obs} = \emptyset \\ Obs_P \cap Area_{veh} = \emptyset \end{cases} \quad (15)$$

其中, $i \in \{A_i, B_i, C_i, D_i\}$ 为第 i ($i=0, 1, \dots, n$) 级车体的顶点; $P \in \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ 为第 P 个障碍

$$\begin{cases} A_i = (A_{ix}, A_{iy}) = [x_{r_i} + (l_i + l_f)\cos\theta_i - 0.5l_w\sin\theta_i, y_{r_i} + (l_i + l_f)\sin\theta_i + 0.5l_w\cos\theta_i] \\ B_i = (B_{ix}, B_{iy}) = [x_{r_i} + (l_i + l_f)\cos\theta_i + 0.5l_w\sin\theta_i, y_{r_i} + (l_i + l_f)\sin\theta_i - 0.5l_w\cos\theta_i] \\ C_i = (C_{ix}, C_{iy}) = (x_{r_i} - l_r\cos\theta_i + 0.5l_w\sin\theta_i, y_{r_i} - l_r\sin\theta_i - 0.5l_w\cos\theta_i) \\ D_i = (D_{ix}, D_{iy}) = (x_{r_i} - l_r\cos\theta_i - 0.5l_w\sin\theta_i, y_{r_i} - l_r\sin\theta_i + 0.5l_w\cos\theta_i) \end{cases} \quad (16)$$

其中, l_f 和 l_r 分别为各级车体的前悬、后悬长度; l_w 为车宽。

求得各级车体在 $t \in [0, T]$ 时刻所处位置轮廓后, 即可由式(15)检测车辆是否与障碍物发生碰撞。本文采用射线检测法^[18]进行检测, 其核心思想为从待测点向任意方向引出一条射线, 并统计该射线与多边形边界交点数量, 若为奇数, 则待测点位于多边形内部; 若为偶数, 则待测点位于多边形外部。

2 融合引导搜索与渐次优化的铰接式车辆运动规划算法

较之于乘用车, 铰接式车辆运动学模型更为复杂, 进行运动规划时应着重关注。混合 A* 算法(如图 3(a)所示)能够考虑车辆运动学模型, 本文以此为基础并对其进行改进, 结合铰接式车辆工作环境与车辆行为特征, 在提升规划效率的同时, 生成更符合铰接式车辆运动特性的路径。

2.1 引导搜索算法

文献[19]考虑铰接式车辆运动特性, 对混合 A* 算法进行改进, 能够较好地完成铰接式车辆规划任务, 但仍存在规划时间较长、前后反复机动次数较多等问题, 运动能力在狭窄环境中受到制约。若基于环境特征与特定规则, 优先扩展更符合铰接式车辆运动特性的节点, 则可进一步减少规划任务用时。为此, 提出了基于引导搜索的改进混合 A* 算法, 借鉴跳点搜索(jump point search, JPS)算法^[20]的邻域修剪思想, 并将其应用于文献[19]所述改进混合 A* 算法。

1) 根据环境开放程度差异, 设置可变前轮转角采样搜索间隔。若车辆处于狭窄环境, 规划任务应侧重通过精细搜索生成无碰路径, 故此时可减小采样间隔以确保搜索精度; 若环境较为开放, 规划任

物的顶点。障碍物顶点坐标可预先离线计算, 第 i 级车体的 4 个顶点 A_i, B_i, C_i, D_i 坐标可由其后轴中心点坐标及后轴航向角确定, 如式(16)所示。

务应侧重通过快速搜索向目标位姿扩展, 故此时可扩大采样间隔以提高搜索速度。据此, 采样搜索间隔计算方式如式(17)所示。

$$\Delta\delta = \begin{cases} \frac{\delta_{\max} - (-\delta_{\max})}{N_{\text{narrow}}}, & \text{狭窄环境中} \\ \frac{\delta_{\max} - (-\delta_{\max})}{N_{\text{open}}}, & \text{开放环境中} \end{cases} \quad (17)$$

其中, N_{narrow} 和 N_{open} 分别为狭窄环境与开放环境中的采样点数量。如图 3(b)所示, 随着扩展节点逐渐接近障碍物, 采样间隔逐渐减小, 采样点逐渐密集。

2) 牵引车大幅度转向或频繁转向不利于各级挂车运动, 因此节点扩展时优先扩展与铰接式车辆当前航向角相同或相近的方向, 而对大幅度转向或频繁转向行为施加惩罚项 P_{DC} , 以减少车辆转向次数, 提升路径平顺性。

$$P_{DC} = \omega_{DC} \cdot [\theta_0(i) - \theta_0(i-1)] \quad (18)$$

其中, ω_{DC} 为铰接式车辆转向行驶惩罚因子。如图 3(b)所示, 前向搜索代价随迭代次数增加而增加(绿色→棕色→红色), 而在每轮迭代中, 与当前航向角相同或相近的采样点代价值更低(以浅色表示)。

3) 铰接式车辆后向运动难度较高, 即使人类驾驶员也需经过较长时间的训练方可掌握^[21], 因此设置系统非必要不选择后向运动方式。通过施加较高的后向运动惩罚 P_R , 减少节点后向扩展数量, 以避免系统为寻求最优解而进行非必要的反复多次机动, 进一步确保铰接式车辆运动过程中的安全性与稳定性。

$$P_R = \begin{cases} \omega_R \cdot [v(i) - v(i-1)], & v(i) \cdot v(i-1) < 0 \\ 0, & v(i) \cdot v(i-1) \geq 0 \end{cases} \quad (19)$$

其中, ω_R 为铰接式车辆后向运动惩罚因子。如图 3(b)所示, 从铰接式车辆后部扩展的节点(深红色

曲线簇)表示更高的扩展代价。

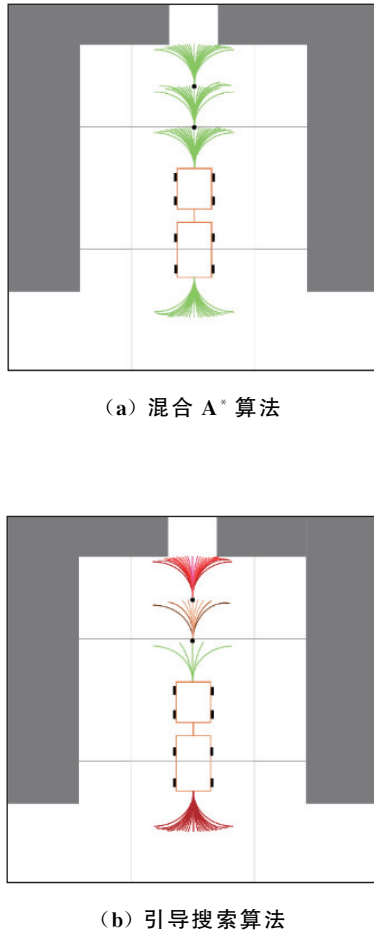


图 3 混合 A* 算法改进前后对比示意

Fig. 3 Comparison of hybrid A* algorithm and search-guided algorithm

综上,引导搜索算法代价函数如式(20)所示。

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(p) = g(p) + h(p) \\
 \text{s. t.} \quad & g(p) = g(p_{\text{parent}}) + d(p_{\text{parent}}, p) + Pen_{DC} + Pen_R \\
 & h(p) = \max(h_{\text{nonholonomic}}, h_{\text{holonomic}})
 \end{aligned} \tag{20}$$

其中, $f(p)$ 表示总代价; $g(p)$ 表示铰接式车辆实际移动代价; $h(p)$ 表示启发代价; $g(p_{\text{parent}})$ 表示从初始状态 p_s 到父节点 p_{parent} 的移动代价; $d(p_{\text{parent}}, p)$ 表示从父节点 p_{parent} 到当前节点 p 的欧氏距离; 子启发函数 $h_{\text{nonholonomic}}$ 考虑车辆非完整性约束但忽略障碍物信息, 采用 Reeds-Sheep(RS) 曲线表征从当前位姿到目标位姿的运动学可行最短路径; 子启发函数 $h_{\text{holonomic}}$ 不考虑车辆非完整性约束但考虑障碍物信息, 采用 A* 算法计算从当前位置到目标位置的无碰最短路径。

2.2 渐次优化算法

引导搜索算法能够提升规划实时性, 但经典混合 A* 算法生成的路径通常为次优解^[22], 在此基础上改进的算法同样无法保证最优性, 有必要进一步优化。此外, 随着挂车级数增加, 算法完备性与分辨率完备性间差异变大。由于运动规划任务包含明确的性能指标与约束条件, 本节将铰接式车辆运动规划任务描述为 OCP, 并将其离散化为 NLP 问题, 以求取数值最优解。同时, 由于避碰约束规模较大, 直接求解收敛速度慢, 本节首先采用引导搜索算法生成初始解, 而后收缩障碍物尺寸以简化避碰约束, 最后在求解过程中渐次扩展至原尺寸以加速求解。

2.2.1 OCP 构建

铰接式车辆运动规划任务可描述为满足系统运动学约束、机械约束、边值约束及避碰约束的时间-能量综合 OCP, 如式(21)所示。

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J = \omega_1 T + \omega_2 \int_0^T \omega^2(t) dt \\
 \text{s. t.} \quad & \text{运动学约束式(1)(3)(8)(9)} \\
 & \text{机械约束式(10)(11)} \\
 & \text{边值约束式(13)(14)} \\
 & \text{避碰约束式(15)}
 \end{aligned} \tag{21}$$

其中, $\omega_i (i=1, 2)$ 为权重因子; ω 为前轮偏转角速度。代价函数由两部分构成, 第一部分表示系统期望以最短时间运动至目标点, 即时间最优路径; 第二部分表示牵引车运动过程中期望尽可能避免转向与变速, 从而得到更为平滑且能量消耗更小的路径, 即能量最优路径。

式(21)构建了铰接式车辆运动规划任务的最优控制形式, 但由于代价函数中的积分项不易直接求解, 难以获得解析解, 因而在铰接式车辆运动规划任务中一般更关注数值解的求取。本文采用一阶龙格-库塔(Runge-Kutta)法将式(21)中全部未知量离散化, 将其转化为 NLP 问题, 而后借助基于内点法的求解器 IPOPT(interior point optimizer)^[23] 进行数值求解。然而, 当地图尺寸较大或环境信息复杂时, 往往存在大规模避碰约束, 直接基于内点法求解可能导致求解耗时过长, 甚至难以在容许时间内收敛至最优解。因此, 可采用图搜索等算法预先生成一条可行路径作为初始解, 并在此基础上进行路径优化, 这一方法称为“热启动(warm start)”。热启动作为求解 NLP 问题的重要环节, 所生成的初始解对

求解速度、最优解收敛方向等产生影响,且高质量初始解将提升最终解质量,进一步提升规划性能。

2.2.2 基于渐次优化的铰接式车辆路径优化

本节采用障碍物渐进扩展的避碰检测方法,在求解式(21)时首先剔除避碰约束,而后逐步扩展障碍物尺寸,构建一系列避碰约束子问题,在求解上述子问题过程中优化原有路径,直至全部障碍物扩展为原尺寸。在障碍物扩展过程中,通过将前一子问题的解作为后一子问题的初始解,简化避碰约束子问题求解过程。算法伪代码如算法 1 所示。

算法 1 基于障碍物渐进扩展的避碰检测方法

```

输入:障碍物信息、车辆参数及剔除避碰约束后的优化路径  $\Gamma_1$ 、
障碍物收缩幅度  $\gamma_0$  和扩展步长  $s$ 
输出:最优路径  $\Gamma^*$ 
1:  $\gamma_{cur} \leftarrow \gamma_0; \Gamma_{cur} \leftarrow \Gamma_1;$ 
2: while  $\gamma_{cur} \neq 1$  do
3:    $\gamma \leftarrow \gamma_{cur} + s;$ 
4:   if  $\gamma > 1$  then
5:      $\gamma \leftarrow 1;$ 
6:   end if
7:   以  $\Gamma_{cur}$  为热启动求解收缩幅度为  $\gamma$  的子问题;
8:   if 求解成功 then
9:     更新  $\Gamma_{cur}$  为收缩幅度  $\gamma$  时的输出路径;
10:    if  $\Gamma_{cur}$  与原尺寸障碍物无碰撞 then
11:       $\Gamma^* \leftarrow \Gamma_{cur};$ 
12:      return  $\Gamma^*;$ 
13:    end if
14:     $\gamma_{cur} \leftarrow \gamma;$ 
15:  else
16:    输出引导搜索算法生成路径;
17:  end if
18: end while
19: return  $\Gamma^*;$ 

```

3 仿真实验与分析

本章对提出的算法进行了仿真实验,以对比验证并分析算法性能。仿真实验在 MATLAB 2023b 中进行,所用计算机 CPU 型号 i7-12700H,主频 2.3 GHz,内存 16 GB。

3.1 仿真参数设置

在静态环境运动规划中,需设置地图中障碍物尺寸、搜索分辨率等环境参数以及铰接式车辆尺寸、机械特性等车辆参数。仿真实验环境如图 4 所示,算法涉及参数及其取值如表 1 所示。在二维栅格地图中,障碍物可分为凸多边形与凹多边形,对于运动规划任务,非凸障碍物的存在表示环境中存在“死胡同”,算法可能会消耗更多时间在其内部扩展节点,导致搜索

效率低下。因此,分别在不包含非凸障碍物的狭窄环境(图 4(a))与包含非凸障碍物的狭窄环境(图 4(b))中开展仿真实验,以验证算法性能。两地图尺寸均为 $50 \text{ m} \times 30 \text{ m}$,地图分辨率为 0.1 m 。图 4(a)中牵引车起始点坐标为 $(-13 \text{ m}, 23 \text{ m})$,图 4(b)中牵引车起始点坐标为 $(-17 \text{ m}, 23 \text{ m})$,除起始点坐标不同外,两任务起始时刻各级车体航向角均为 0 ,目标点坐标均为 $(22 \text{ m}, 23 \text{ m})$,任务终止时刻各级车体航向角均为 0 (在位姿偏差容许阈值 ϵ 内即为完成规划任务)。

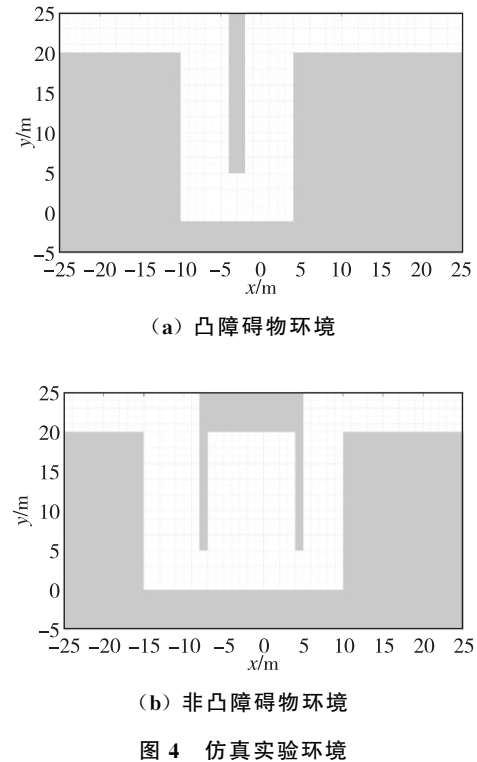


Fig. 4 Simulation experiment environment

3.2 算法性能对比

基于上述环境参数与铰接式车辆参数,在凸障碍物环境与非凸障碍物环境中分别拖曳 1 级、2 级及 3 级挂车进行仿真实验,分别分析引导搜索算法与渐次优化算法性能。

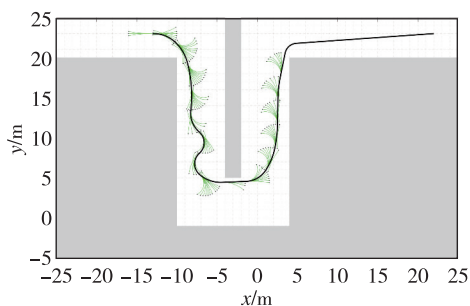
3.2.1 引导搜索算法性能分析

在凸障碍物环境中,混合 A^* 算法与引导搜索算法规划效果如图 4 所示(黑色线段表示牵引车路径)。由图 4 可知,较之于混合 A^* 算法(图 5(a)(c)),引导搜索算法(图 5(b)(d)(f))扩展节点数更少,表明算法对后向运动施加惩罚将使节点扩展方式以前向扩展为主,从而加速搜索过程。同时,引导搜索算法生成路径的转向次数小于混合 A^* 算法生成路径,表明算法对转向行驶施加惩罚将使节点

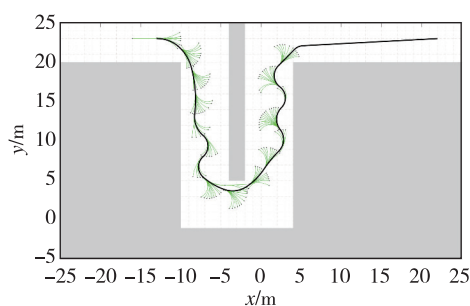
表 1 算法涉及参数物理意义及实验取值

Tab. 1 Physical meaning and values of the parameters involved in the algorithm

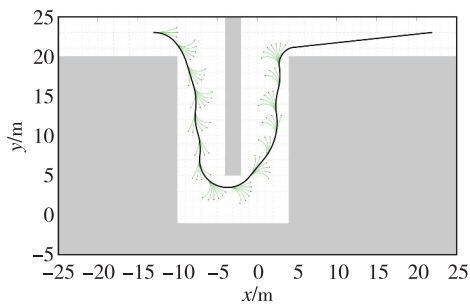
参数符号	物理意义	实验取值
l_0	牵引车轴距	1.2 m
l_{f0}	牵引车前悬	0.3 m
l_{r0}	牵引车后悬	0.3 m
N_T	挂车级数	1, 2, 3
$l_i (i = 1, 2, \dots, n)$	挂车轴距	1.4 m
$e_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$	第 i 级挂车后轴中心点到铰接点距离	0 m
$c_i (i = 1, 2, \dots, n)$	铰接点到第 i 级挂车前轴中心点距离	1 m
$l_{fi} (i = 1, 2, \dots, n)$	挂车前悬	0.3 m
$l_{ri} (i = 1, 2, \dots, n)$	挂车后悬	0.3 m
$l_{wi} (i = 0, 1, \dots, n)$	牵引车与挂车宽度	1 m
v_{\max}	牵引车速度上界	1.5 m/s
a_{\max}	牵引车加速度上界	0.25 m/s ²
δ_{\max}	牵引车前轮偏角上界	0.7 rad
ω_{\max}	牵引车前轮偏转角速度上界	0.5 rad/s
α	防弯折裕量	$\pi/9$
ϵ	位姿偏差容许阈值	[1 m, 1 m, $\pi/18, \pi/18$]
ω_{DC}	转向行驶惩罚因子	0.2
ω_R	后向运动惩罚因子	0.8
$\omega_i (i = 1, 2)$	代价函数权重因子	[1, 0.1]
s	扩展步长	0.05



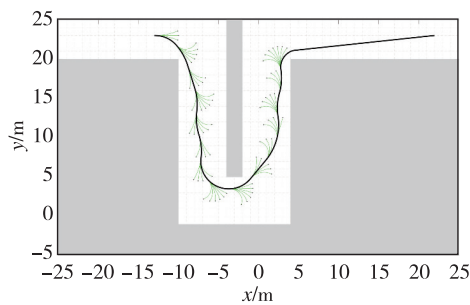
(a) 混合 A* 算法 ($N_T=1$)



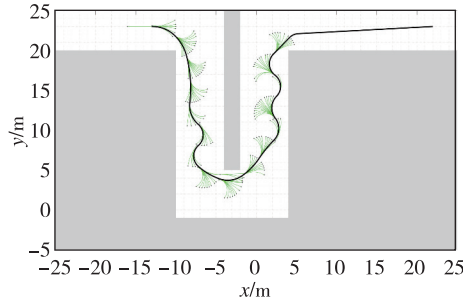
(b) 引导搜索算法 ($N_T=1$)



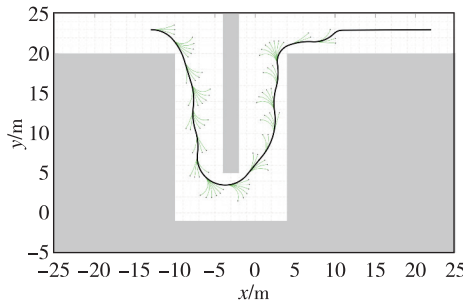
(c) 混合 A* 算法 ($N_T=2$)



(d) 引导搜索算法 ($N_T=2$)



(e) 混合 A* 算法 ($N_T=3$)



(f) 引导搜索算法 ($N_T=3$)

图 5 凸障碍物环境中不同挂车级数规划效果对比

Fig. 5 Comparison of planning results of different trailer amount in convex obstacle environment

扩展时优先选择保持当前航向角,从而获得更平滑的路径。

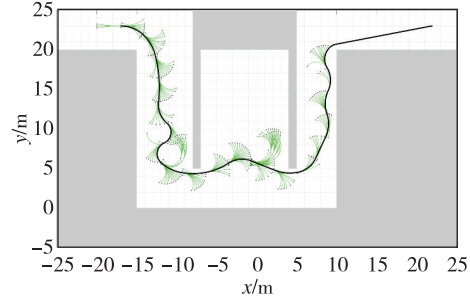
在凸障碍物环境中,混合 A* 算法与引导搜索算法规划效率如表 2 所示。由表 2 可知,由于扩展节点数减少,引导搜索算法求解耗时较混合 A* 算法大幅降低,表明引导搜索算法在凸障碍物环境下能够在不降低求解质量的同时提升搜索效率。

表 2 凸障碍物环境中算法规划效率对比
Tab. 2 Comparison of planning efficiency in convex obstacle environment

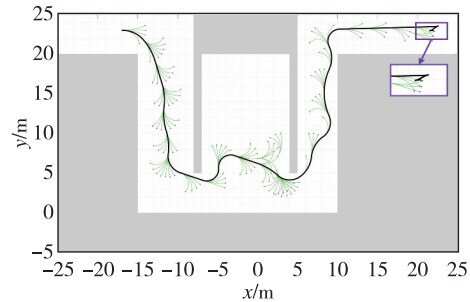
N_T	混合 A* 算法 求解耗时/s	基于引导搜索的混合 A* 算法求解耗时/s	性能提升/%
1	2.87	1.47	48.8
2	2.94	1.43	51.4
3	2.78	1.58	43.2

在非凸障碍物环境中,混合 A* 算法与引导搜索算法规划效果如图 6 所示。由图 6 及前述分析可知,较之于混合 A* 算法(图 6(a)(c)(e)),引导搜索算法(图 6(b)(d)(f))对转向行驶与后向运动的惩罚使其在非凸障碍物内部扩展节点数更少,且路径平滑性更优。此外,由图 6(b)与图 6(e)对比可知,引导搜索算法(图 6(b),拖曳 1 级挂车)在必要时能够后向扩展节

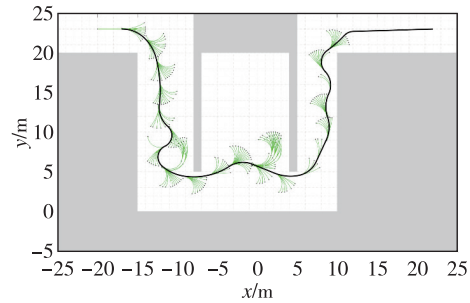
点,但后向运动幅度较小,对系统稳定性影响较小;混合 A* 算法(图 6(e),拖曳 3 级挂车)规划结果存在非必要后向运动,且运动幅度较大,不利于系统稳定,而使用引导搜索算法对同样拖曳 3 级挂车的系统进行运动规划时则可避免上述情况。



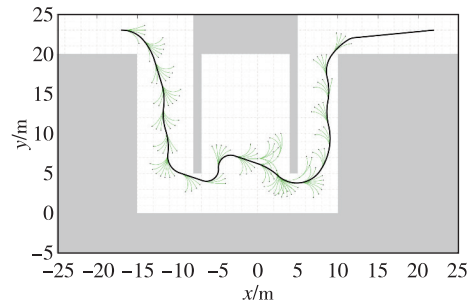
(a) 混合 A* 算法 ($N_T=1$)



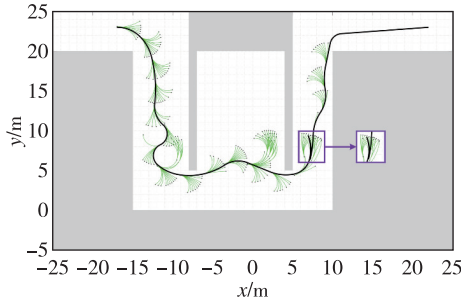
(b) 引导搜索算法 ($N_T=1$)



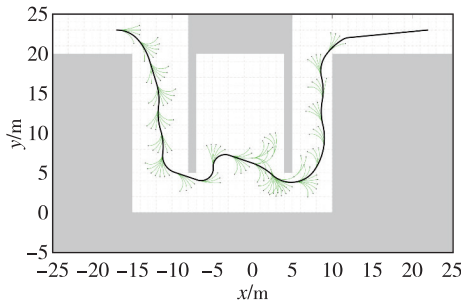
(c) 混合 A* 算法 ($N_T=2$)



(d) 引导搜索算法 ($N_T=2$)



(e) 混合 A* 算法 ($N_T=3$)



(f) 引导搜索算法 ($N_T=3$)

图 6 非凸障碍物环境中不同挂车级数规划效果对比

Fig. 6 Comparison of planning results of different trailer amount in non-convex obstacle environment

在非凸障碍物环境中,混合 A* 算法与引导搜索算法规划效率如表 3 所示。对比表 2 与表 3 可知,由于非凸障碍物环境中可探索区域面积更大,且两种算法在非凸障碍物内进行节点扩展时不可避免会耗费更多时间,故两种算法在非凸障碍物环境中的求解耗时均高于在凸障碍物环境中的求解耗时。但由于在非凸障碍物内部扩展节点数更少,引导搜索算法求解耗时更短,仅为混合 A* 算法求解耗时的 50%左右,表明引导搜索算法在非凸障碍物环境下同样能够提升搜索效率。

表 3 非凸障碍物环境中算法规划效率对比

Tab. 3 Comparison of planning efficiency in non-convex obstacle environment

N_T	混合 A* 算法 求解耗时/s	基于引导搜索的混合 A* 算法求解耗时/s	性能提升/%
1	10.65	4.61	56.8
2	8.87	4.50	49.3
3	9.22	4.45	51.7

3.2.2 渐次优化算法性能分析

基于图 4 所示环境参数与表 1 所述算法相关参数,在两环境中分别拖曳 1 级、2 级及 3 级挂车进行仿真实验。设置两组对比实验,对比分析各算法优化求

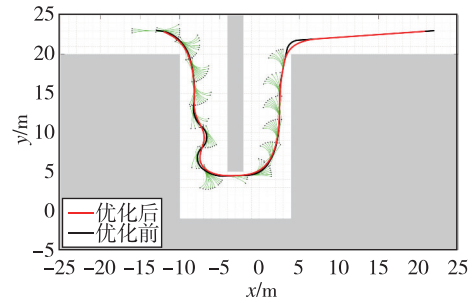
解代价值及求解时间,对比实验描述如表 4 所示。

表 4 对比实验设置

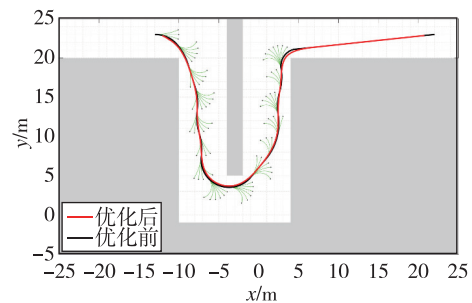
Tab. 4 Comparison experiment setup

算法名称	算法描述
算法 2	省略热启动环节,直接使用内点法进行优化求解
算法 3	使用混合 A* 算法生成初始解,以此为热启动进行渐次优化

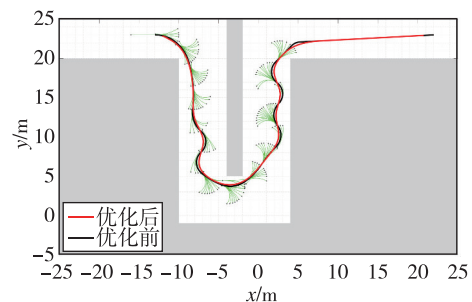
在凸障碍物环境中,算法 3 与渐次优化算法效果如图 7 所示(黑色线段表示优化前牵引车路径,红色线段表示优化后路径),算法性能对比如表 5 所示。由结果可知,较之于算法 3(图 7(a)(c)(e))通过混合 A* 算法生成初始解,由于引导搜索算法生成的初始解质量更高,因而渐次优化算法(图 7(b)(d)(f))求解代价值及求解时间均优于算法 3;采用算法 2 求解均失败,表明单独使用优化方法难以在较大规



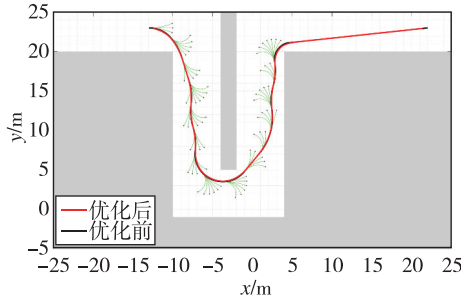
(a) 算法 3 ($N_T=1$)



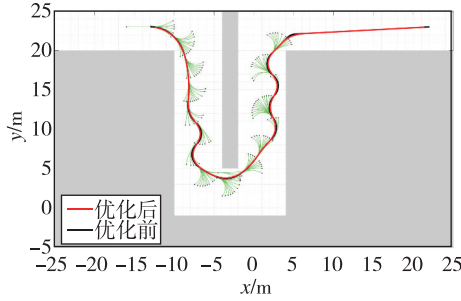
(b) 渐次优化算法 ($N_T=1$)



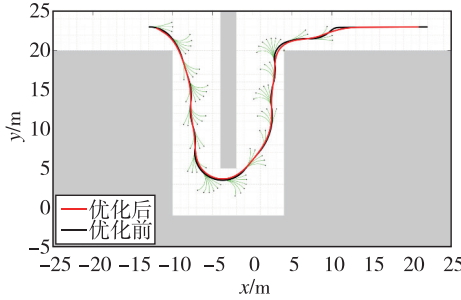
(c) 算法 3 ($N_T=2$)



(d) 渐次优化算法 ($N_T=2$)



(e) 算法 3 ($N_T=3$)



(f) 渐次优化算法 ($N_T=3$)

图 7 凸障碍物环境中优化算法效果对比
Fig. 7 Comparison of optimization results in convex obstacle environment

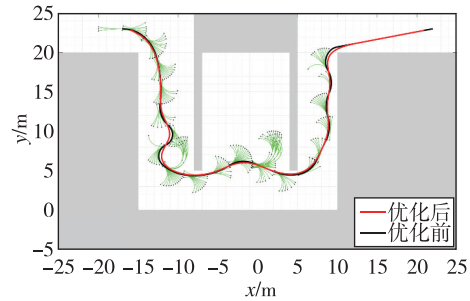
表 5 凸障碍物环境中优化算法性能对比
Tab. 5 Comparison of optimization performances in convex obstacle environment

N_T	算法 2		算法 3		渐次优化算法	
	代价 J	耗时/s	代价 J	耗时/s	代价 J	耗时/s
1	Failed	—	22.578 6	13.27	20.214 5	11.98
2	Failed	—	24.917 2	13.37	19.375 8	12.14
3	Failed	—	21.841 3	40.08	21.289 3	19.39

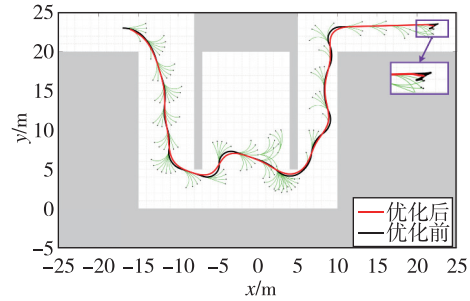
模地图或存在障碍物的复杂场景中完成运动规划任务。由实验结果可知,初始解在优化求解中不可省略,且初始解质量将影响求解代价值与求解时间,即高质量初始解能够提升规划性能。

在非凸障碍物环境中,算法 3 与渐次优化算法效

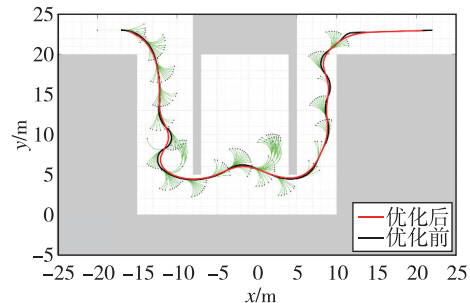
果如图 8 所示,算法性能对比如表 6 所示(算法 2 求解失败)。由结果可知,渐次优化算法(图 8(b)(d)(f))求解代价值及求解时间优于或接近算法 3(图 8(a)(c)(e))。此外,对于图 8(b)所示引导搜索生成路径中存在的小幅度后向运动,可通过渐次优化算法将其消除,提升路径平滑性;而对于如图 8(e)所示运动幅度较大的后向运动,则难以通过优化方式加以改善,表明初始解质量将对最终解质量产生影响。



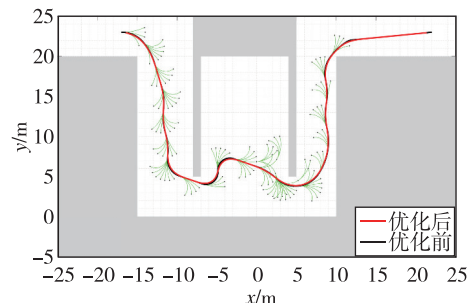
(a) 算法 3 ($N_T=1$)



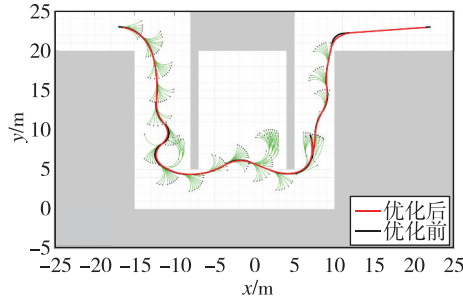
(b) 渐次优化算法 ($N_T=1$)



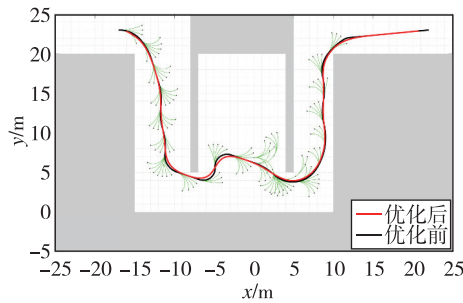
(c) 算法 3 ($N_T=2$)



(d) 渐次优化算法 ($N_T=2$)



(e) 算法 3 ($N_T=3$)



(f) 渐次优化算法 ($N_T=3$)

图 8 非凸障碍物环境中优化算法效果对比

Fig. 8 Comparison of optimization results in non-convex obstacle environment

表 6 非凸障碍物环境中优化算法性能对比

Tab. 6 Comparison of optimization performances in non-convex obstacle environment

N_T	算法 2		算法 3		渐次优化算法	
	代价 J	耗时/s	代价 J	耗时/s	代价 J	耗时/s
1	Failed	—	23.899 2	20.24	23.510 6	15.76
2	Failed	—	25.178 6	20.52	22.301 2	15.51
3	Failed	—	22.917 3	33.54	22.875 6	33.66

4 结论

本文针对铰接式车辆狭窄空间运动规划方法开展研究,主要结论包括:

1) 构建了包含通用运动学模型与约束条件的双轴欠驱动铰接式车辆运动规划任务模型。基于理论力学与几何学,推导了牵引车与挂车位姿及速度递推表达式,构建了能够表征任意级数、不同构型铰接式车辆的通用运动学模型。此外,考虑铰接式车辆自身与外部环境特性,建立了包括机械约束、边值约束及避碰约束的运动规划任务约束条件,为后续研究奠定基础。

2) 提出了基于引导搜索的铰接式车辆狭窄空间运动规划方法。首先基于经典混合 A^* 算法,通

过设置可变前轮转角采样搜索间隔、优先扩展与车辆当前航向角相近的方向及施加高后向运动惩罚等方法,在兼顾搜索精确性与快速性的同时,保证系统的安全性与稳定性。在凸障碍物环境与非凸障碍物环境中进行了仿真实验,与经典混合 A^* 算法相比,引导搜索算法可将求解效率提升 40%~50%,且生成路径平滑性更优。

3) 提出了基于渐次优化的铰接式车辆路径优化方法。由于引导搜索算法生成路径为次优解,采用基于内点法的数值优化方法对其进行优化。首先以引导搜索算法生成初始解,而后针对避碰约束规模大、求解速度慢的问题,设计了障碍物渐进扩展方法,以加速数值求解过程。仿真实验表明,渐次优化算法能够消除初始解中存在的小幅后向运动或航向角大幅跳变,进一步提升路径平滑性。

此外,本文暂未考虑在实车上验证上述算法,未来可结合环境感知、运动控制等模块,在铰接式车辆平台上验证运动规划算法,并根据实际效果进一步改进算法性能。

参考文献

[1] ZHAO H, ZHOU S, CHEN W, et al. Modeling and motion control of industrial tractor-trailers vehicles using force compensation[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2021, 26(2): 645-656.

[2] GONZÁLEZ D, PÉREZ J, MILANÉS V, et al. A review of motion planning techniques for automated vehicles[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2016, 17(4): 1135-1145.

[3] RIMMER A, CEBON D. Planning collision-free trajectories for reversing multiply-articulated vehicles [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2016, 17(7): 1998-2007.

[4] LJUNGQVIST O, EVESTEDT N, CIRILLO M, et al. Lattice-based motion planning for a general 2-trailer system[C]// Proceedings of 2017 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Los Angeles: IEEE, 2017: 819-824.

[5] MANAV A, LAZOGLU I. A novel cascade path planning algorithm for autonomous truck-trailer parking[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(7): 6821-6835.

[6] PALMIERI L, KOENIG S, ARRAS K. RRT-based nonholonomic motion planning using any-angle path biasing[C]// Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Stock-

- holm: IEEE, 2016: 2775-2781.
- [7] BREZAK M, PETROVIC I. Real-time approximation of clothoids with bounded error for path planning applications[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(2): 507-515.
- [8] YUE M, WU X, GUO L, et al. Quintic polynomial-based obstacle avoidance trajectory planning and tracking control framework for tractor-trailer system [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2019, 17(10): 2634-2646.
- [9] GHILARDELLI F, LINI G, PIAZZI A. Path generation using η^4 -splines for a truck and trailer vehicle [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2014, 11(1): 187-203.
- [10] LI B, WANG K, SHAO Z. Time-optimal trajectory planning for tractor-trailer vehicles via simultaneous dynamic optimization [C]// Proceedings of 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). Hamburg: IEEE, 2015: 3844-3849.
- [11] OLIVEIRA R, LJUNGQVIST O, LIMA P, et al. A geometric approach to on-road motion planning for long and multi-body heavy-duty vehicles [C]// Proceedings of 2020 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Las Vegas: IEEE, 2020: 999-1006.
- [12] GUO Y, GUO Z, WANG Y, et al. A survey of trajectory planning methods for autonomous driving - part I: unstructured scenarios[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles (Early Access), 2023, DOI: 10.1109/TIV.2023.3337318.
- [13] LI B, LI L, ACARMAN T, et al. Optimization-based maneuver planning for a tractor-trailer vehicle in a curvy tunnel: a weak reliance on sampling and search [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 706-713.
- [14] BERGMAN K, LJUNGQVIST O, AXEHILL D. Improved path planning by tightly combining lattice-based path planning and optimal control[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2021, 6(1): 57-66.
- [15] RUAN X, HUANG Y, WANG Y, et al. An efficient trajectory planning method with a reconfigurable model for any tractor-trailer vehicle[J]. IEEE Transactions on Transportation Electrification, 2023, 9(2): 3360-3374.
- [16] YUAN J. Hierarchical motion planning for multisteering tractor-trailer mobile robots with on-axle hitching[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2017, 22(4): 1652-1662.
- [17] ZHAO H, CHEN W, ZHOU S, et al. Online trajectory planning for an industrial tractor towing multiple full trailers[C]// Proceedings of 2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Paris: IEEE, 2020: 6089-6095.
- [18] HERMANN E, FAURE F, RAFFIN B. Ray-traced collision detection for deformable bodies [C]// Proceedings of 2008 International Conference on Computer Graphics Theory and Applications (GRAPP). Funchal: INSTICC, 2008: 293-299.
- [19] LI B, ACARMAN T, ZHANG Y, et al. Tractor-trailer vehicle trajectory planning in narrow environments with a progressively constrained optimal control approach[J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2020, 5(3): 414-425.
- [20] HARABOR D, GRASTIEN A. Online graph pruning for pathfinding on grid maps[C]// Proceedings of Association for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI). San Francisco: AAAI, 2011: 1114-1119.
- [21] EVESTEDT N, LJUNGQVIST O, AXEHILL D. Path tracking and stabilization for a reversing general 2-trailer configuration using a cascaded control approach [C]// Proceedings of 2016 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Gothenburg: IEEE, 2016: 1156-1161.
- [22] DOLGOV D, THRUN S, MONTEMERLO M, et al. Path planning for autonomous vehicles in unknown semi-structured environments[J]. The International Journal of Robotics Research, 2010, 29(5): 485-501.
- [23] WÄCHTER A, BIEGLER L. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming [J]. Mathematical Programming, 2006, 106: 25-57.

(编辑:孟彬)