doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2025.03.014

基于增广乘子法的限位全姿态四轴转台框架角解算和实验研究

赵雨豪,刘　军,苏　浩,钟正虎

(北京航天控制仪器研究所,北京 100039)

摘　要:三轴转台在仿真过程中会产生运动学奇异,因此很难模拟大角度全姿态的飞行运动。四轴转台通过在其基础上增加一个冗余轴,利用冗余自由度的特点,可以有效规避三轴转台的奇异性。一般的四轴转台解算算法都是基于连续旋转推导的,但由于成本和结构尺寸要求,越来越多的转台进行了位姿限制。为了针对性使用带限位的四轴转台模拟大角度飞行运动,采取增广乘子法,将框架的限位作为新的不等式约束,参与优化解算以保证转台合理运行,并进行了仿真实验。实验比较了新算法和连续旋转下的计算误差,结果验证了增广乘子法的可行性,并表明其小角度解算精度优于约束优化方法,同时大角度解算精度仅比小角度的情况低 1 个数量级。本研究探讨了增广乘子法在限位四轴转台仿真上的可行性,在满足转台实时性要求的同时获得了很高的仿真精度,也便于后续的精度优化。

关键词:四轴转台;框架位姿限制;增广乘子法;迭代算法

中图分类号:TP273+.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:2095-8110(2025)03-0137-12

Frame angle solution and experimental research of full-pose four-axis turntable with pose constraints based on augmented multiplier method

ZHAO Yuhao, LIU Jun, SU Hao, ZHONG Zhenghu

(Beijing Institute of Aerospace Control Devices, Beijing 100039, China)

Abstract: Due to the kinematic singularity of the three-axis turntable in the simulation process, it is difficult to simulate large angle flight motions with full attitude. The four-axis turntable effectively avoids the singularity by adding a redundant axis to the three-axis turntable, exploiting the characteristics of redundant degrees of freedom. Normally, the solution for the full-pose four-axis turntable is based on its continuous rotation. However, it is more common to use turntables with pose constraints due to cost and structural size requirements. In order to simulate the large angle flight motion using four-axis turntables with pose constraints, the augmented multiplier method is adopted, where the pose constraints of the frame are used as new inequality constraints and included in the optimization solution to ensure reasonable operation. Simulation experiments are conducted. The experimental calculation error comparison of the new algorithm and the continuous rotation-based algorithm validates the feasibility of the augmented multiplier method and shows that its small angle solution accuracy is superior to the constrained optimization method. Meanwhile,

收稿日期:2024-10-23;**修订日期**:2025-02-25

作者简介:赵雨豪(1998—),男,硕士研究生,主要从事全姿态多轴转台的设计和解算控制算法方面的研究。

the accuracy of the large angle solution is only one order of magnitude behind that of the small angle solution. This study explores the feasibility of the augmented multiplier method in the simulation of four-axis turntables with pose constraints, achieving high simulation accuracy while meeting the real-time requirements of the turntable, and laying the foundation for subsequent accuracy optimization.

Key words: Four-axis turntable; Frame pose constraints; Augmented multiplier method; Iterative algorithm

0 引言

三轴仿真转台是半实物仿真中最常使用的硬件设备之一,它可以模拟飞行器在空间中滚转、俯仰和偏航 3 个姿态的变化,复现飞行器运动时的各种姿态运动及动力学特性。对于三轴仿真转台,每个轴对应一个姿态角,物理含义明确。但如果三轴转台在工作过程中出现两轴重合的情况,就会由 3 个自由度退化为 2 个自由度,出现运动学奇异[1],从而无法模拟空间 3 个自由度的姿态运动。于是,国内逐渐开展了全姿态四轴仿真转台的研究,利用一个冗余的自由度,使 2 个框架配合避开奇异位置,以避免框架锁定现象[2],很好地解决了这个问题。在航天领域中,已有越来越多的测试采用全姿态四轴转台代替三轴转台,以模拟出更复杂的运动轨迹,并拥有更高的灵活性模拟姿态变化,大大提升了测试的准确性。

然而,四轴转台相比三轴转台需要更高的研发成本,尤其是连续旋转的四轴转台。为了保证转动灵活度和全姿态连续旋转,当仿真负载尺寸较大时,转台的规模将会急剧变大,从而严重降低转台的动态性能,更大的体积和质量也会相应地增大转动惯量和控制难度。在实际应用中发现,通过限制全姿态四轴转台的框架姿态,由于旋转角度的限制,可以大幅减小框架的体积,从而节约成本并且更容易控制。以往的算法都是基于连续旋转推导的,虽然无法直接应用于限位转台,但在全姿态四轴转台控制算法的研究中仍具有很大的影响。例如,在四轴的冗余自由度的处理上,Dubey 等[3]基于梯度投影法提出了一种避免求解雅可比伪逆的方法。祖迪等[4]结合固定关节法和梯度投影法进行二次计算,先通过梯度投影法得到优化解,再固定某一关节,从而解除冗余得出精确解,兼顾效果和精度,并筛选其多解性。万俊等[5]也为加权梯度投影法选择了更合适的性能标准。2016 年,徐勤贝[6]提出了新的包含冗余第四轴的四轴框架组系统,解决了三轴框架系统在飞行姿态运动仿真中的局限性,在此基础上,基于约束优化理论,通过拉格朗日乘子法计算得到了四轴转台的最优框架角。2022 年,林笑亦等[7]进行了四轴全姿态转台框架角解算算法的研究,提出了基于阻尼最小范数法的解算方案,并进行了实物仿真验证,对四轴全姿态仿真转台进行了优化,提高了其控制精度。此外,王红辉等[8]探索了基于旋转矢量的方法。

以上方法都是在转台框架可连续旋转的条件下推导的,不适用于带限位的转台。因此,本研究使用增广乘子法,引入框架限位约束进行解算和实验研究。在新的算法中,4 个框架角的姿态限制将作为不等式约束条件代入四轴转台的框架解算过程。根据转台的运动学模型进行迭代计算[9],以避免出现框架的奇异。并与连续旋转的转台比较仿真精度和实时性,进行不同的姿态角轨迹测试,在满足转台实时性要求的条件下获得了很高的仿真精度,提供了限位转台的解算适用方案。

1 限位四轴转台的数学模型

1.1 四轴转台的工作原理

四轴转台是在三轴转台的基础上增加一个与中框架相同方向的基框轴,属于典型的冗余自由度机构。在工作过程中,四轴转台利用冗余轴的运动避免运动奇异,从而保障转台能够模拟飞行器在空间 3 个方向上的全姿态运动。该项目研究的是立式四轴转台,其结构如图 1 所示。立式四轴转台是在卧式三轴转台的基础上增加一个基框架,其 4 个框架角由外到内依次为基框、外框、中框和内框,旋转角度分别为 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$。

因此,四轴全姿态转台工作的原理是使用 4 个框架的框架角旋转以模拟给定的 3 个姿态角 ψ,θ,γ 的旋转过程。数学上,使用框架矩阵和姿态矩阵来表示。对于四框架的转台,选取基准坐标系[10],4 个框架由外至内依次的相对旋转矩阵可以表示为

$$R_y(\delta_1)=\begin{bmatrix}\cos\delta_1 & 0 & -\sin\delta_1\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\delta_1 & 0 & \cos\delta_1\end{bmatrix},R_z(\delta_2)=\begin{bmatrix}\cos\delta_2 & \sin\delta_2 & 0\\ -\sin\delta_2 & \cos\delta_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$R_y(\delta_3)=\begin{bmatrix}\cos\delta_3 & 0 & -\sin\delta_3\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\delta_3 & 0 & \cos\delta_3\end{bmatrix},R_x(\delta_4)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\delta_4 & \sin\delta_4\\ 0 & -\sin\delta_4 & \cos\delta_4\end{bmatrix}\tag{1}$$

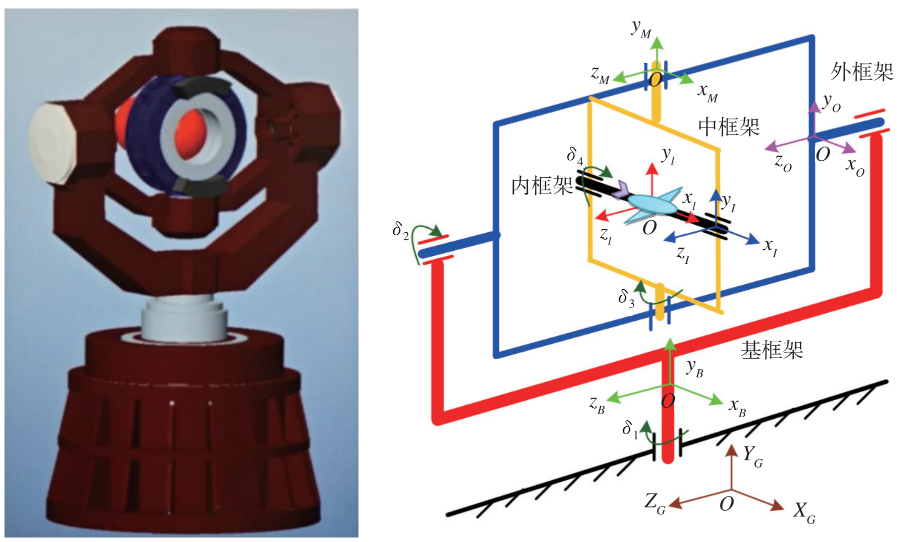

图 1　四轴转台结构模型原理

Fig. 1　Schematic of four-axis turntable structure model

同样，对于 3 个姿态角，依次旋转的坐标系如图 2 所示。

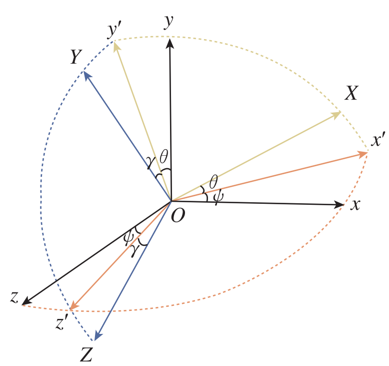

图 2　姿态角旋转

Fig. 2　Attitude angle rotation

姿态角按 OY，OZ，OX 顺序旋转，有对应的旋转矩阵为

$$R_y(\psi)=\begin{bmatrix}\cos\psi & 0 & -\sin\psi\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\psi & 0 & \cos\psi\end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$R_x(\gamma)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}\tag{2}$$

全姿态四轴转台框架仿真模拟姿态角运动时满足的条件即

$$R_x(\delta_4)R_y(\delta_3)R_z(\delta_2)R_y(\delta_1)=R_x(\gamma)R_z(\theta)R_y(\psi)\tag{3}$$

1.2　位姿限制条件的数学表示

为实现转台框架解算，需要把位姿限制这一具体条件加入到数学模型中。显然，这一条件应为不等式约束，每一个框架均可进行最大旋转角度 $\alpha_{\max}$ 和最小旋转角度 $\alpha_{\min}$ 的限制。因此，理论上一共应有 8 个不等式约束，分别限制 4 个框架的最大和最小旋转角度。在该研究中，暂时对一个框架，即内框架，进行限制（更多框架约束也是采用同一方法

增加不等式)，那么不等式约束仅针对 δ_4，应当控制 δ_4 在 $\alpha_{\min}$ 和 $\alpha_{\max}$ 之间。

$$\alpha_{\min} \leqslant \delta_4 \leqslant \alpha_{\max} \tag{4}$$

为了便于算法处理，将该约束移项整理成小于等于 0 的标准形式，即

$$\begin{cases} \delta_4 - \alpha_{\max} \leqslant 0 \\ -\delta_4 + \alpha_{\min} \leqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

1.3 运动学模型及方程

对于全姿态四轴转台，其主要运动学模型是四轴转台绕框架轴线的交点转动的框架角速度传递微分方程组[11]。设负载运动的姿态角速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}_l$，在 3 个负载坐标轴上的分量分别是(ω_{lx}，ω_{ly}，ω_{lz})，于是可以推导出以下方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_l = \begin{bmatrix} \omega_{lx} \\ \omega_{ly} \\ \omega_{lz} \end{bmatrix} = & R_x(\delta_4) R_y(\delta_3) R_z(\delta_2) R_y(\delta_1) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\delta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\delta_4) R_y(\delta_3) R_z(\delta_2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \\ & R_x(\delta_4) R_y(\delta_3) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\delta}_3 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\delta_4) \begin{bmatrix} \dot{\delta}_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

通过整理合并可以得到

$$\begin{bmatrix} \omega_{lx} \\ \omega_{ly} \\ \omega_{lz} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{\delta}_3 \\ \dot{\delta}_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{J}$ 矩阵的所有元素都可以由 4 个框架角 δ_1，δ_2，δ_3，δ_4 的正弦和余弦组合表示。对于全姿态四轴转台，满足的框架角速度传递条件可以作为优化问题的等式约束。另一方面，在已知 3 个负载姿态角速度分量，求解 4 个框架角速度时，相当于对给定 4 个未知数的 3 个方程组进行求解，这也从速度组合传递上说明了指令多解的问题[6]。

2 增广乘子法原理及应用

2.1 基本原理

拉格朗日乘子法是古典的求解约束极值的间接方法之一。然而，在使用过程中发现，此方法存在着诸多细节问题，例如对于非凸问题容易计算失败；对大型非线性优化问题，需要求解高次方程组，数值解法也很困难；此外，还面临可能存在的重根问题。因此，在经典拉格朗日乘子法的基础上，近年来提出的结合了惩罚函数思想的增广乘子法具有很大的优势。一方面，它可以解决包含等式约束和不等式约束的问题；另一方面，在计算过程的数值稳定性和计算效率上，它都优于传统的惩罚函数法，此方法正在日益完善。

增广乘子法[12]通过定义一个增广的拉格朗日函数，包含原始的目标函数以及约束条件的乘子项和增广项(惩罚项)，进行迭代优化并处理约束条件。在每次迭代中，该方法通过最小化拉格朗日函数更新决策变量和拉格朗日乘子，直至满足收敛条件。对于等式约束和不等式约束，增广乘子法采取不同的处理方式：等式约束就直接加入到增广函数中，而不等式约束则通过引入正惩罚函数和最大化函数进行处理。

2.2 优化问题不等式约束的处理方法

对于含有不等式约束的优化问题

$$\min f(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t.}\ \ g_j(\boldsymbol{x}) \leqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m)$$

引入松弛变量 $\boldsymbol{z} = (z_1 z_2 \cdots z_m)^{\mathrm{T}}$，并且构建新的约束

$$g'_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = g_j(\boldsymbol{x}) + z_j^2 \quad (j = 1,2,\cdots,m) \tag{8}$$

于是，原问题即可转换为等式约束的优化问题，从而可以采用等式约束的方法进行求解。首先确定一个足够大的惩罚因子 r，将增广乘子函数写为如下形式

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = & f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [g_j(\boldsymbol{x}) + z_j^2] + \\ & \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} [g_j(\boldsymbol{x}) + z_j^2]^2 \end{aligned} \tag{9}$$

利用解析法求函数 $M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})$ 关于 $\boldsymbol{z}$ 的极值，即令$\nabla_z M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = 0$，可得到

$$z_j\{\lambda_j + r[g_j(\boldsymbol{x}) + z_j^2]\} = 0 \quad (j = 1,2,\cdots,m) \tag{10}$$

显然，若 $\lambda_j + r\,g_j(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$，则 $z_j^2 = 0$；若 $\lambda_j +$

$rg_j(\boldsymbol{x})<0$，则 $z_j^2=-\left[\frac{1}{r}\lambda_j+g_j(\boldsymbol{x})\right]$。

于是可得

$$z_j^2=\frac{1}{r}\{\max[0,-(\lambda_j+rg_j(\boldsymbol{x}))]\} \tag{11}$$

在此基础上，可以把新的增广乘子函数改写为

$$M(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{m}\{\max[0,\lambda_j+rg_j(\boldsymbol{x})]^2-\lambda_j^2\} \tag{12}$$

这就是增广乘子函数对不等式约束的处理方式，其中的松弛变量在最后也会被代换掉。实际计算时，只需对给定的 λ 和 r 求解关于 $\boldsymbol{x}$ 的无约束极值 $\min M(\boldsymbol{x})$，其中乘子的迭代按式(13)进行

$$\lambda_j^{k+1}=\max\{0,\lambda_j^k+rg_j(\boldsymbol{x})\}\quad(j=1,2,\cdots,m) \tag{13}$$

3 基于增广乘子法的框架角解算方法

3.1 框架角解算算法的设计与实现

与其他转台框架角解算优化算法的设计一致，考虑能量有界并保证系统稳定，以框架角速度的平方和为优化目标[13]，并施加一定的权重，即

$$\min\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\delta}\right\}$$

其中[14]

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}w_1&&&\\&w_2&&\\&&w_3&\\&&&w_4\end{bmatrix},\boldsymbol{\delta}=[\dot{\delta}_1,\dot{\delta}_2,\dot{\delta}_3,\dot{\delta}_4]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

其中：$\dot{\delta}_1,\dot{\delta}_2,\dot{\delta}_3,\dot{\delta}_4$ 分别表示基框架、外框架、中框架和内框架的转动角速度；w_1,w_2,w_3,w_4 分别对应 4 个框架角速度的权重值，权重的设置可以用于避免基框架和中框架出现重合，一定程度上解决奇异性，其设置详情参考阻尼最小二乘方法[7]。同时，将运动学模型中四轴转台绕框架轴线交点转动的框架角速度传递微分方程组作为等式约束[6,15]，框架的位姿限制作为不等式约束加入到优化问题之中。即得到

$$\min\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}w_i\dot{\delta}_i^2\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}h_1:J_{11}\cdot\dot{\delta}_1+J_{12}\cdot\dot{\delta}_2+J_{13}\cdot\dot{\delta}_3+J_{14}\cdot\dot{\delta}_4-\omega_{lx}=0\\h_2:J_{21}\cdot\dot{\delta}_1+J_{22}\cdot\dot{\delta}_2+J_{23}\cdot\dot{\delta}_3+J_{24}\cdot\dot{\delta}_4-\omega_{ly}=0\\h_3:J_{31}\cdot\dot{\delta}_1+J_{32}\cdot\dot{\delta}_2+J_{33}\cdot\dot{\delta}_3+J_{34}\cdot\dot{\delta}_4-\omega_{lz}=0\end{cases}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g_1:\delta_4-\alpha_{\max}\leqslant 0\\g_2:-\delta_4+\alpha_{\min}\leqslant 0\end{cases} \tag{15}$$

其中：h 表示等式约束；g 表示不等式约束。接下来，仅需在不等式和等式同时约束的条件下，求得最优化问题的解即可。在提出的优化问题中出现了自变量的微分形式，在进行数值计算时，通常以差分的形式表示微分，然后采用递推形式进行计算。假设差分运算的时间间隔为 Δt，并将所有的微分形式代换处理，可以得到

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}w_i\left[\frac{\delta_i(t+\Delta t)-\delta_i(t)}{\Delta t}\right]^2\right\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}h_1:J_{11}\cdot\Delta\delta_1+J_{12}\cdot\Delta\delta_2+J_{13}\cdot\Delta\delta_3+J_{14}\cdot\Delta\delta_4-\omega_{lx}\cdot\Delta t=0\\h_2:J_{21}\cdot\Delta\delta_1+J_{22}\cdot\Delta\delta_2+J_{23}\cdot\Delta\delta_3+J_{24}\cdot\Delta\delta_4-\omega_{ly}\cdot\Delta t=0\\h_3:J_{31}\cdot\Delta\delta_1+J_{32}\cdot\Delta\delta_2+J_{33}\cdot\Delta\delta_3+J_{34}\cdot\Delta\delta_4-\omega_{lz}\cdot\Delta t=0\end{cases}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g_1:\delta_4(t+\Delta t)-\alpha_{\max}\leqslant 0\\g_2:-\delta_4(t+\Delta t)+\alpha_{\min}\leqslant 0\end{cases} \tag{16}$$

其中

$$\Delta\delta_i=\delta_i(t+\Delta t)-\delta_i(t) \tag{17}$$

因为在设计时，已知当前时刻的 4 个框架角和输入负载的姿态角、姿态角速度，则可以通过增广的拉格朗日乘子方法求解下一时刻的框架角。把下一时刻的框架角 $\delta_i(t+\Delta t)$ 当作自变量，根据约束写出增广拉格朗日函数为

$$M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{\delta}(t+\Delta t))+\frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{2}\{\max[0,\lambda_{1j}+r\cdot g_j(\boldsymbol{\delta})]^2-\lambda_{1j}^2\}+\sum_{p=1}^{3}\lambda_{2p}h_p(\boldsymbol{\delta})+\frac{r}{2}\sum_{p=1}^{3}[h_p(\boldsymbol{\delta})]^2 \tag{18}$$

其中：$f(\boldsymbol{\delta}(t+\Delta t))$ 是 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{2}w_i\left[\frac{\delta_i(t+\Delta t)-\delta_i(t)}{\Delta t}\right]^2$ 目标函数以 $\boldsymbol{\delta}(t+\Delta t)$ 为自变量的形式；λ_{1j} 和 λ_{2p} 分别代表不等式约束和等式约束对应的拉格朗日增广乘子。为求得极值，将构造的增广拉格朗日函数

分别对每个变量求偏导，考虑到不等式约束项的 max 函数求偏导不确定，此处可以先按 0 处理，在偏导计算完成后根据条件修改。对 $\delta_1(t+\Delta t)$ 求偏导得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \delta_1(t+\Delta t)}=&\left[\frac{w_1}{\Delta t^2}+r(J_{11}\cdot J_{11}+J_{21}\cdot J_{21}+J_{31}\cdot J_{31})\right]\cdot[\delta_1(t+\Delta t)-\delta_1(t)]+r(J_{11}\cdot J_{12}+\\&J_{21}\cdot J_{22}+J_{31}\cdot J_{32})[\delta_2(t+\Delta t)-\delta_2(t)]+r(J_{11}\cdot J_{13}+J_{21}\cdot J_{23}+J_{31}\cdot J_{33})\cdot\\&[\delta_3(t+\Delta t)-\delta_3(t)]+r(J_{11}\cdot J_{14}+J_{21}\cdot J_{24}+J_{31}\cdot J_{34})[\delta_4(t+\Delta t)-\delta_4(t)]+\\&\lambda_{21}\cdot J_{11}+\lambda_{22}\cdot J_{21}+\lambda_{23}\cdot J_{31}-r(J_{11}\cdot\omega_{lx}\cdot\Delta t+J_{21}\cdot\omega_{ly}\cdot\Delta t+J_{31}\cdot\omega_{lz}\cdot\Delta t)\end{aligned}\tag{19}$$

由于形式过于复杂，对 $\delta_2(t+\Delta t)$，$\delta_3(t+\Delta t)$，$\delta_4(t+\Delta t)$ 的偏导在此不再赘述，其与式(19)形式高度一致。然后令偏导为 0，得到 4 个方程

$$\begin{gathered}\frac{\partial M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \delta_1(t+\Delta t)}=0,\frac{\partial M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \delta_2(t+\Delta t)}=0,\\\frac{\partial M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \delta_3(t+\Delta t)}=0,\frac{\partial M(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \delta_4(t+\Delta t)}=0\end{gathered}\tag{20}$$

通过整理和系数合并后，可以转化成如下形式

$$\begin{cases}K_{11}\delta_1(t+\Delta t)+K_{12}\delta_2(t+\Delta t)+\\\quad K_{13}\delta_3(t+\Delta t)+K_{14}\delta_4(t+\Delta t)=b_1\\K_{21}\delta_1(t+\Delta t)+K_{22}\delta_2(t+\Delta t)+\\\quad K_{23}\delta_3(t+\Delta t)+K_{24}\delta_4(t+\Delta t)=b_2\\K_{31}\delta_1(t+\Delta t)+K_{32}\delta_2(t+\Delta t)+\\\quad K_{33}\delta_3(t+\Delta t)+K_{34}\delta_4(t+\Delta t)=b_3\\K_{41}\delta_1(t+\Delta t)+K_{42}\delta_2(t+\Delta t)+\\\quad K_{43}\delta_3(t+\Delta t)+K_{44}\delta_4(t+\Delta t)=b_4\end{cases}\tag{21}$$

其中：$K_{11}\sim K_{44}$ 是通过合并之后各个变量之前的系数；$b_1\sim b_4$ 则是包含 $\delta_1(t)$，$\delta_2(t)$，$\delta_3(t)$，$\delta_4(t)$，$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{J}$，ω_{lx}，ω_{ly}，ω_{lz}，r 等已知量的计算式。在此基础上，对不等式约束中的 max 函数进行分类偏导处理，在 max 函数不取 0 时，求解偏导数，发现对于 $\delta_4(t+\Delta t)$ 的约束，只在对 $\delta_4(t+\Delta t)$ 求偏导时起作用，且效果如下：

当 $\lambda_{11}+r(\delta_4(t)-\alpha_{\max})>0$ 时，K_{44} 在原基础上增加 r，同时 b_4 在原基础上增加 $(r\cdot\alpha_{\max}-\lambda_{11})$；

当 $\lambda_{12}+r(-\delta_4(t)+\alpha_{\min})>0$ 时，K_{44} 在原基础上增加 r，同时 b_4 在原基础上增加 $(r\cdot\alpha_{\min}+\lambda_{12})$。

经过调整之后，对上式四元方程组进行数值求解，由于 $\lambda_{11}\sim\lambda_{12}$，$\lambda_{21}\sim\lambda_{23}$ 都未知，无法在 4 个方程情况下进行超多元的计算。于是，按照不等式约束的处理思路，针对 $\lambda_{11}\sim\lambda_{12}$，$\lambda_{21}\sim\lambda_{23}$ 进行乘子的迭代。初值取 0，每次迭代后更新 $\boldsymbol{\lambda}$ 的值，并将其代入重新解算四元方程组，直到乘子稳定，此时代表着迭代过程已经收敛。由此便计算出了下一时刻的 4 个框架角的值，最优化问题也得到了求解。

3.2 算法流程及其步骤

根据设计，整体的算法流程如图 3 所示。

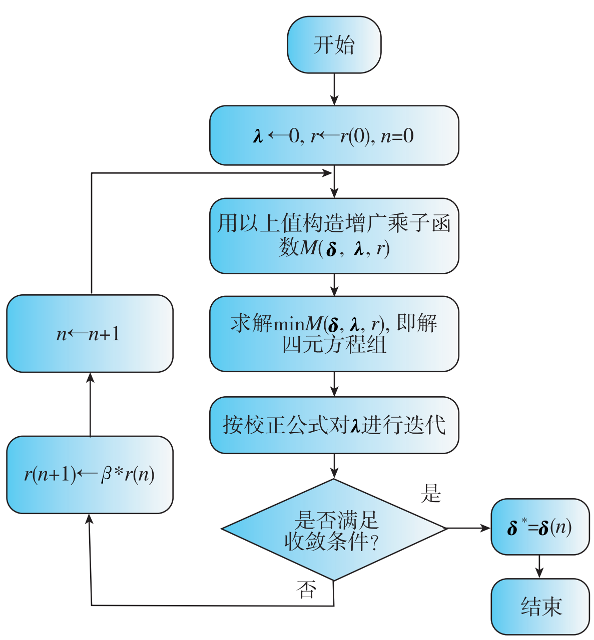

图 3 算法操作流程

Fig. 3 Flow of the algorithm operation

总体实现步骤如下：首先给 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 r 赋初始值，进行第一次增广乘子函数的构造，通过求解最小化该增广乘子函数的问题得到第一组解；然后，根据所给的乘子迭代方式进行计算，计算完成后判断是否满足收敛条件。这里的乘子迭代按照以下方式进行

$$\begin{aligned} \lambda_{1j}(n+1) &= \max[0, \lambda_{1j}(n) + r g_j(\boldsymbol{\delta})] \quad (j=1,2) \\ \lambda_{2p}(n+1) &= \lambda_{2p}(n) + r h_p(\boldsymbol{\delta}) \quad (p=1,2,3) \end{aligned} \tag{22}$$

如果不满足收敛条件，则用迭代后的 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 r 值重新构建增广乘子函数，重复求解和迭代。每次计算后的 r 值增大 β 倍（本研究 β 值取 2～10 皆可，不影响算法效果）后，代入下一次计算以保证迭代收敛，直到满足收敛条件（一般是 $\boldsymbol{\lambda}$ 趋于稳定）。最后乘子函数的解即是最优化问题的解。

4　仿真实验和分析

针对具有位姿限制的全姿态四轴转台解算问题，缺乏公开的位姿限制转台实验数据，因此，实验中将其与连续旋转的四轴转台进行解算准确性和实时性的比较。由于实验对象本身存在差异，其精度理论上劣于连续旋转的转台。在连续旋转全姿态四轴转台的实验中，采用约束最优化理论（徐勤贝）的数据[6]，通过仿真小角度变化连续解算得到的 4 个框架角轨迹线，可以模拟出负载的实际轨迹线，从而比较实际需求和负载的姿态误差。这里用姿态矩阵的 9 个参数观察其误差量级，如图 4 所示。

可以发现，误差的数据量级在 10^{-4}～10^{-5}。所提出的方法也采用相似的参数设置，通过增广乘子法求解，在没有角度超过位姿限制时，给定姿态角轨迹如图 5 所示，得到的框架角解算轨迹线和误差数据分别如图 6 和图 7 所示。

本方法的误差量级控制在 10^{-6}～10^{-7}，可以发现在小角度不超过姿态限制的情况下，由于迭代的效果，增广乘子法的解算精度要优于约束最优化方法。

为了验证增广乘子方法的适用性，实验选择给定姿态角以大角度变化，分别在内框架无限制和超过位姿限制时、俯仰框架小角度和大角度时进行仿真。在无框架限制且俯仰框架小角度情况下，给定姿态角及其对应的框架解算轨迹线和误差如图 8～图 10 所示。

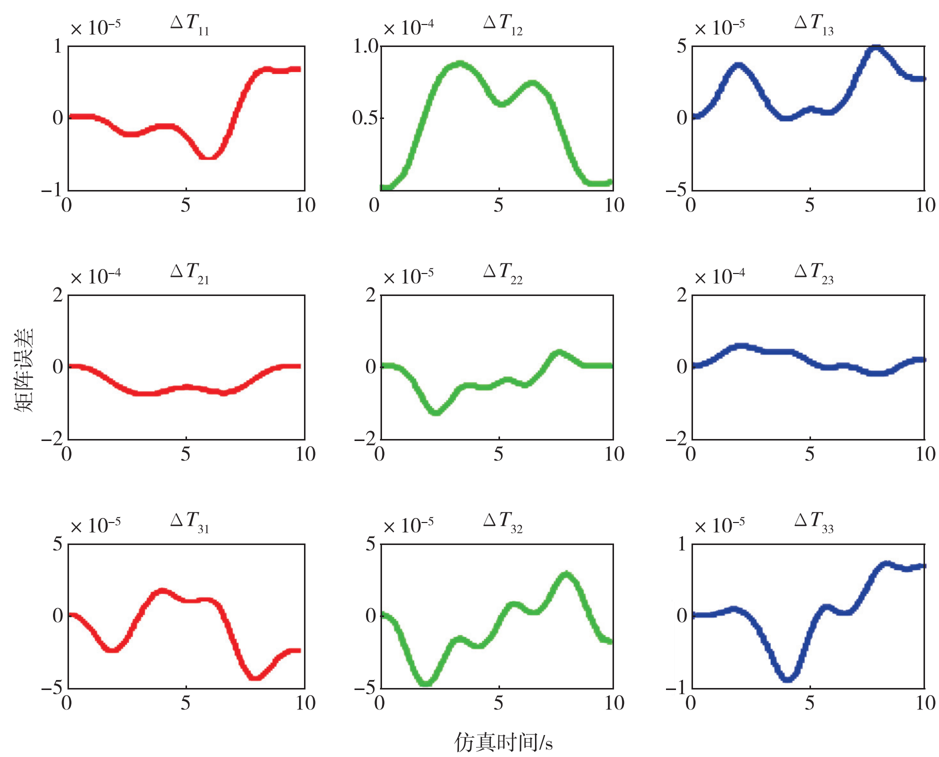

图 4　约束最优化理论-姿态角和四框架角的矩阵误差

Fig. 4　Constrained optimization theory-matrix error of attitude angle and four-frame angle

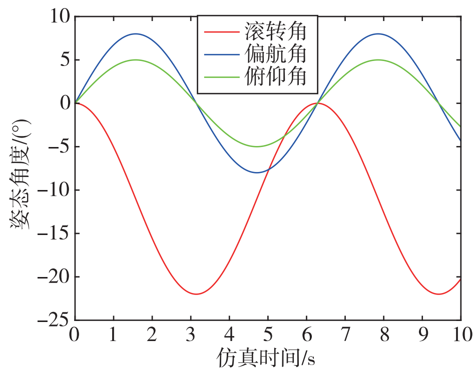

图 5　给定姿态角变化轨迹线

Fig. 5　Trajectory lines of given attitude angle change

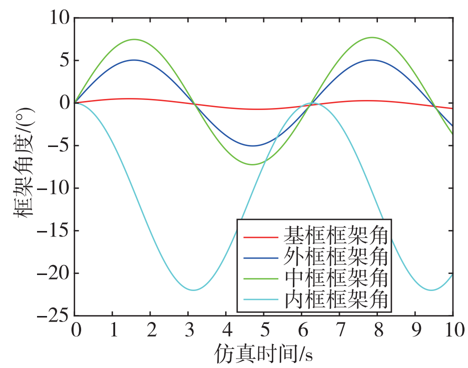

图 6　增广乘子法-框架角解算轨迹线

Fig. 6　Augmented multiplier method-solution trajectory lines of frame angle

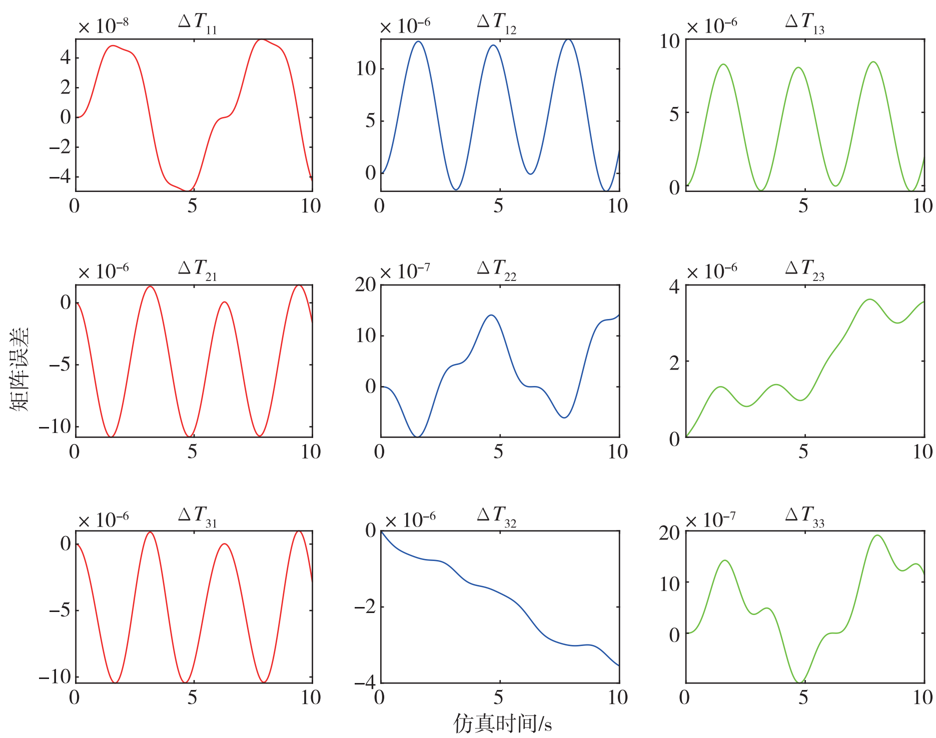

图 7　增广乘子法-姿态角和四框架角的矩阵误差

Fig. 7　Augmented multiplier method-matrix error of attitude angle and four-frame angle

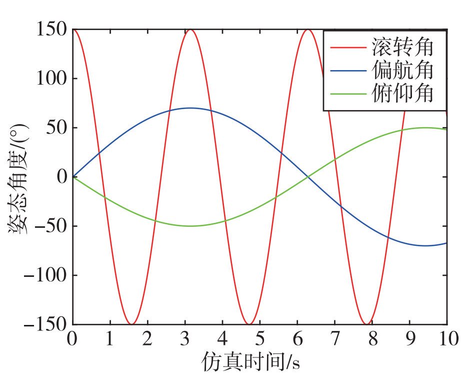

图 8　给定大姿态角变化轨迹线

Fig. 8　Trajectory lines of given large attitude angle change

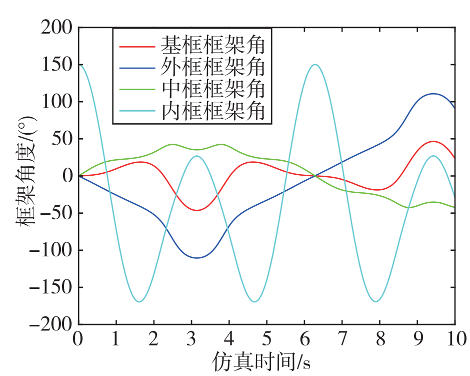

图 9　增广乘子法-无限制下大角度框架角解算轨迹线

Fig. 9　Augmented multiplier method-solution trajectory lines of frame angle with unlimited large attitude angle

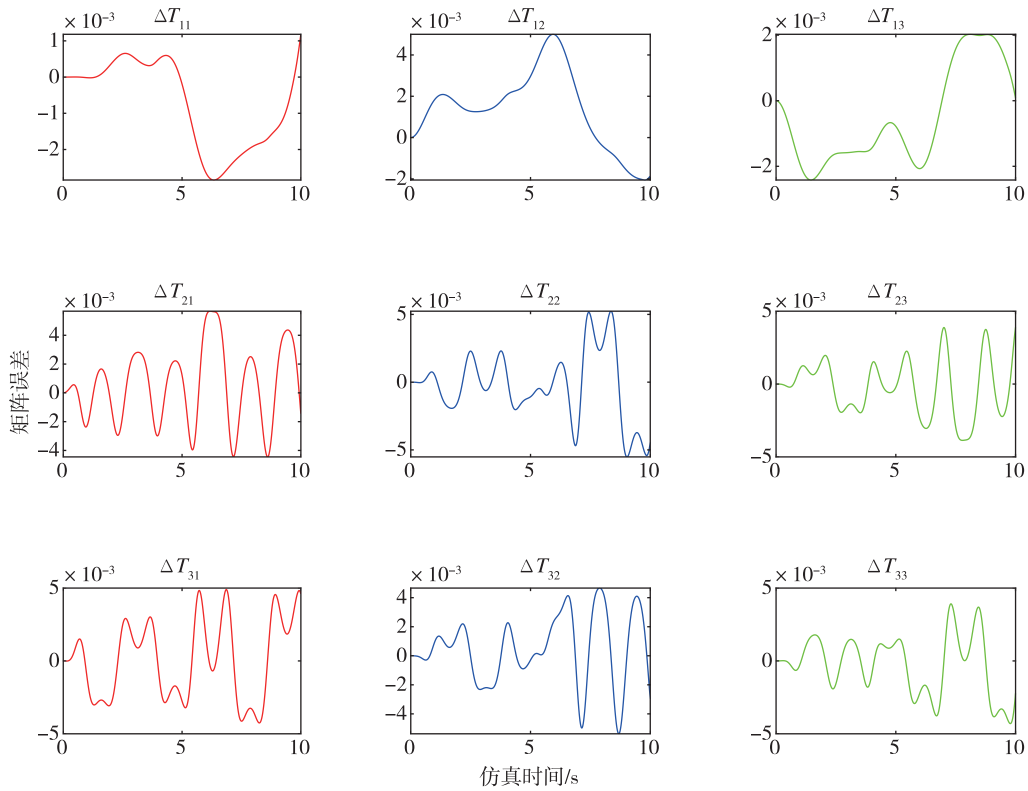

图 10　增广乘子法-无限制下大角度姿态角和四框架角姿态矩阵误差

Fig. 10　Augmented multiplier method-matrix error of attitude angle and four-frame angle with unlimited large attitude angle

轨迹线表明，该方法在大角度的情况下也可以很好地平滑解算框架角度，以模拟三姿态角的变化。但是由于给定角度变大，相对应的姿态矩阵绝对误差也增大了 2～3 个数量级，这是可以预见的。作为算法的重要目标，同样的给定姿态角且俯仰框架小角度，在超过位姿限制的情况下，对应的框架解算轨迹线和误差如图 11 和图 12 所示。

本算法实际适用的极端情况，即给定角超限制且俯仰框架角大角度时，对应的框架解算轨迹线和误差如图 13～图 15 所示。

可以发现，在 2 种超限制情况下内框架角到达限制顶点时，由其他框架的跳变补偿了这部分的运动，该算法的解算误差依旧控制在 10^{-3} 数量级以下。与无限制的结果相接近，与约束最优化理论中的小角度解算误差只相差 1 个数量级，在该情况下是精度较高的结果。但在俯仰角为更大角度时转台出现奇异性，到达算法计算上限，解算会出现明显失真，目前增广乘子法测试的稳定上限在 120°附近。

此外，如果转台按照超限制持续工作下去，最终另外 2 个框架角会逐渐发散。因此，需要进行后续精度优化以抵消发散。从另一个角度上看，位姿限制更应当视为对转台姿态变化的保护，而不是在限位下长时间给超位姿的指令。

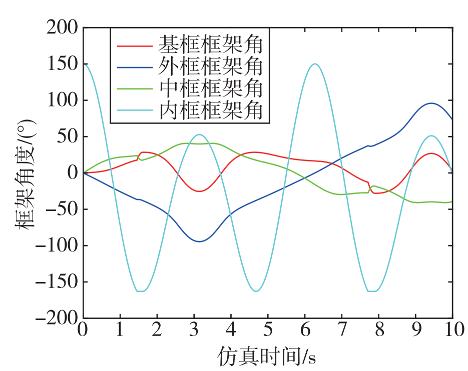

图 11　增广乘子法-超限制下的框架角解算轨迹线

Fig. 11　Augmented multiplier method-solution trajectory lines of frame angle with over limited attitude angle

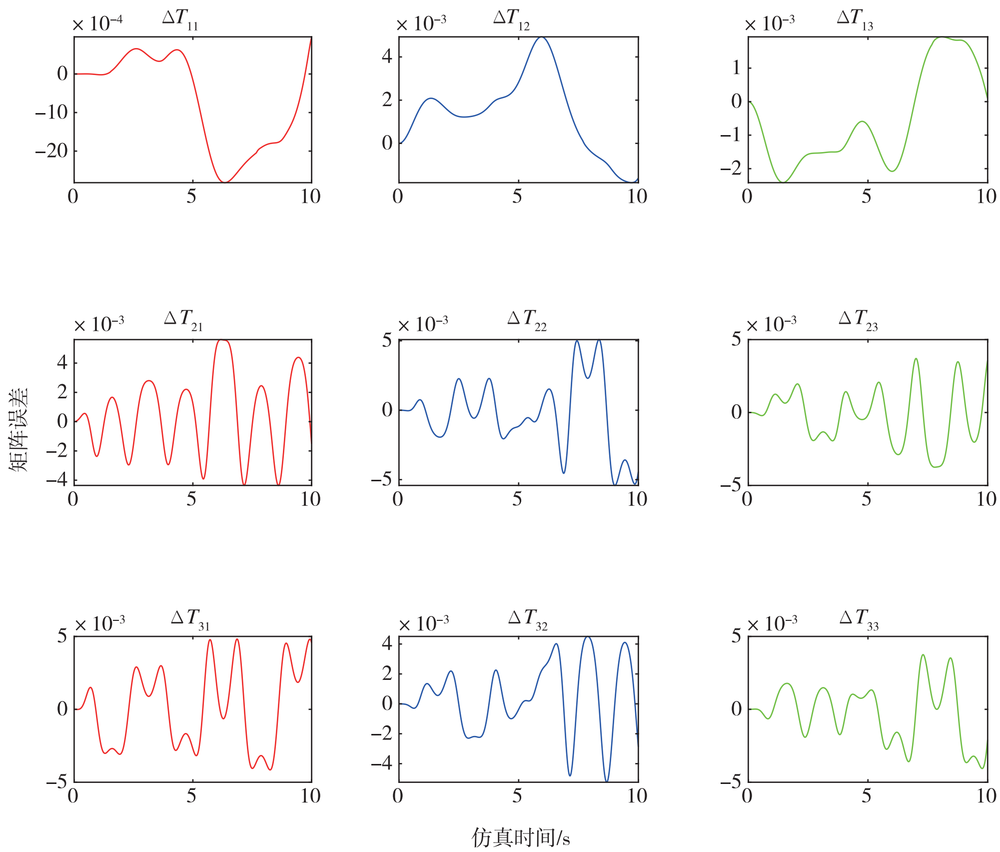

图 12 增广乘子法-超限制下姿态角和四框架角的矩阵误差

Fig. 12 Augmented multiplier method-matrix error of attitude angle and four-frame angle with over limited attitude angle

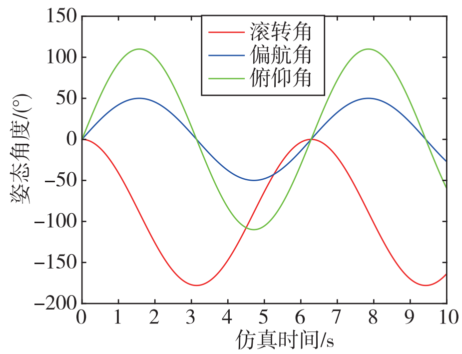

图 13 增广乘子法-超限制且大俯仰角度下的给定姿态角变化轨迹线

Fig. 13 Augmented multiplier method-trajectory lines of given attitude angle change with over limited attitude angle including large pitch angle

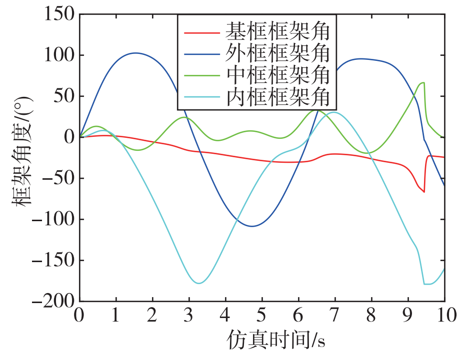

图 14 增广乘子法-超限制且大俯仰角度下的框架角解算轨迹线

Fig. 14 Augmented multiplier method-solution trajectory lines of frame angle with over limited attitude angle including large pitch angle

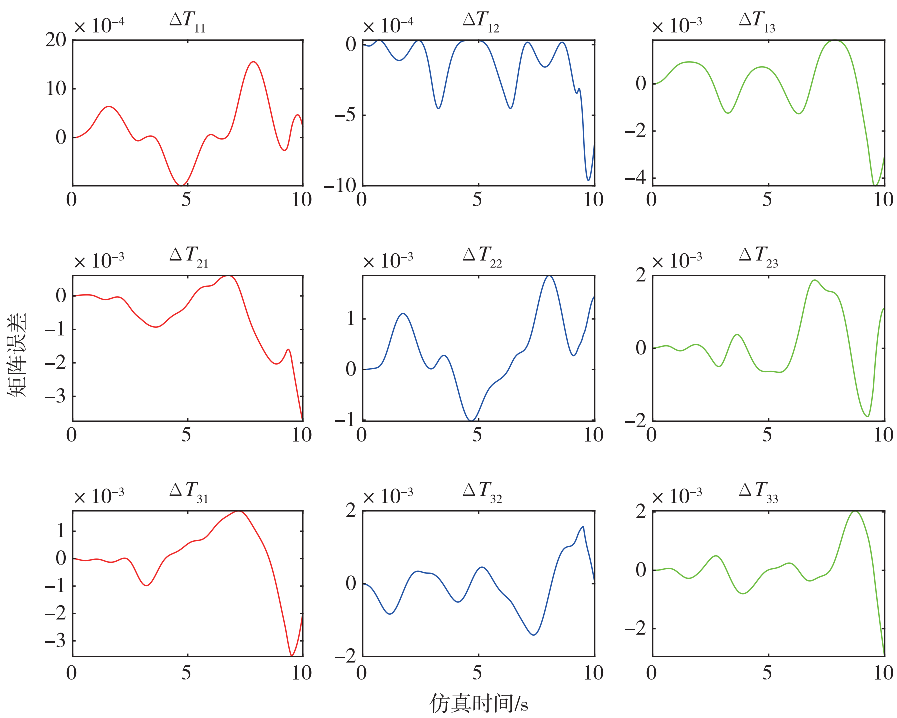

图 15　增广乘子法-超限制且大俯仰角度下姿态角和四框架角的矩阵误差

Fig. 15　Augmented multiplier method-matrix error of attitude angle and four-frame angle with over limited attitude angle including large pitch angle

5　结论

1)经实验验证,增广乘子法具备处理有限个不等式约束的能力,对于四轴限位转台进行框架角解算而言是可行且有效的。

2)在误差控制方面,与连续旋转算法相比,在相同的小角度姿态仿真下,所提出的算法超过了约束最优化方法,更便于高精度要求下的优化和调整。

3)在实时性要求方面,为确保参数收敛,算法中进行了 6～10 次的迭代。仿真实验结果的解算时间在 0.3～0.5 ms 之间,实际测试的时间消耗不超过徐勤贝[6]约束优化方法的 3 倍,并且可以满足常规转台的实时性需求。

4)目前,一些框架角解算方法已经引入了针对精度优化的技术手段,包括冗余自由度的精度优化[3,16-17]及混合方法以应对精度问题[18]。在增广乘子法的基础上,进一步固定内框架角进行二次优化计算,精度将会显著提高。

参考文献

[1] 王晓晨. 基于四轴转台的大角度飞行运动仿真问题研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2011.
WANG Xiaochen. Research on large angle flight motion simulation problems based on four-axis turn table [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011 (in Chinese).

[2] 闵跃军,魏宗康. 基于稳定奇异值的惯性平台全姿态控制方法[J]. 导航与控制,2020,19(4):143-153.
MIN Yuejun, WEI Zongkang. All attitudes control method of inertial platform based on stable singular value[J]. Navigation and Control, 2020, 19(4): 143-153(in Chinese).

[3] DUBEY R V, EULER J A, BABCOCK S M. Real-time implementation of an optimization scheme for seven-degree-of-freedom redundant manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1991, 7(5): 579-588.

[4] 祖迪,吴镇炜,谈大龙. 一种冗余机器人逆运动学求解的有效方法[J]. 机械工程学报,2005,41(6):71-75.
ZU Di, WU Zhenwei, TAN Dalong. Efficient inverse kinematic solution for redundant manipulators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(6): 71-75(in Chinese).

[5] WAN J, YAO J, ZHANG L, et al. A weighted gradient projection method for inverse kinematics of redundant manipulators considering multiple performance criteria[J].

Strojniški Vestnik-Journal of Mechanical Engineering, 2018, 64: 475-487.

[6] 徐勤贝．基于约束最优化理论的四轴转台框架角解算方法研究[D]．哈尔滨:哈尔滨工业大学，2016.
XU Qinbei. The research on the calculation method of four-axis gimbal frame angles based on constrained optimization theory[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016(in Chinese).

[7] 林笑亦，刘军，苏浩，等．基于阻尼最小范数法的四轴转台逆运动学算法分析[J]．导航与控制，2022，21(2)：56-66.
LIN Xiaoyi, LIU Jun, SU Hao, et al. Inverse kinematics algorithm analysis of four axis turntable based on damping minimum norm method[J]. Navigation and Control, 2022, 21(2): 56-66(in Chinese).

[8] 王红辉，杨绍卿，吴成富，等．旋转矢量在高动态全姿态飞行器运动方程中的应用[J]．兵工学报，2016，37(3)：439-446.
WANG Honghui, YANG Shaoqing, WU Chengfu, et al. Application of rotating vector in equations of motion for all-attitude aircrafts[J]. Acta Armamentarii, 2016, 37(3): 439-446(in Chinese).

[9] 王晓晨．一种新型全姿态飞行仿真转台的运动学分析[J]．中国科学：信息科学，2010，40(4)：549-560.
WANG Xiaochen. Kinematic analysis of a new type of full attitude flight simulation turntable[J]. Scientia Sinica (Informationis), 2010, 40(4): 549-560(in Chinese).

[10] 王艳奎，屠宁，吴根水，等．半实物仿真系统转台初值及驱动方程奇异性研究[J]．航空兵器，2012(4)：45-49.
WANG Yankui, TU Ning, WU Genshui, et al. Study on initial value of flight table in hardware-in-the-loop simulation and drive equation singularity[J]. Aero Weaponry, 2012(4): 45-49(in Chinese).

[11] 蔡建昌．四轴转动框架空间姿态控制及误差补偿[D]．哈尔滨：哈尔滨工程大学，2015.
CAI Jianchang. The space attitude control and error compensation of four-axis rotating frame[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2015(in Chinese).

[12] 彭云龙，王林军，杜义贤，等．采用增广乘子法和免疫算法的混合可靠性分析[J]．三峡大学学报(自然科学版)，2021，43(3)：79-83.
PENG Yunlong, WANG Linjun, DU Yixian, et al. Hybrid reliability analysis using augmented multiplier method and immune algorithm[J]. Journal of China Three Gorges University (Natural Sciences), 2021, 43(3): 79-83(in Chinese).

[13] HUANG S, PENG Y, WEI W, et al. Clamping weighted least-norm method for the manipulator kinematic control: avoiding joint limits[C]// Proceedings of IEEE 2014 33rd Chinese Control Conference (CCC). Nanjing: IEEE, 2014: 8309-8314.

[14] 阳方平，李洪谊，王越超，等．一种求解冗余机械臂逆运动学的优化方法[J]．机器人，2012，34(1)：17-21.
YANG Fangping, LI Hongyi, WANG Yuechao, et al. An optimization method for solving the inverse kinematics of redundant manipulator[J]. Robot, 2012, 34(1): 17-21(in Chinese).

[15] TING F, CHEN X, XU J. Inverse kinematic control method of redundant manipulators with joint limits constraints[C]// Proceedings of IEEE 2018 37th Chinese Control Conference (CCC). Wuhan: IEEE, 2018: 3893-3898.

[16] 齐延庆，王松山，郝建平，等．冗余自由度优化技术研究[J]．计算机测量与控制，2013，21(3)：759-761.
QI Yanqing, WANG Songshan, HAO Jianping, et al. Optimization techniques of virtual human joints' redundant DOFs[J]. Computer Measurement & Control, 2013, 21(3): 759-761(in Chinese).

[17] YAN W, LEI S. An optimization method for inverse kinematics of a 7-DOF redundant manipulator[C]// Proceedings of IEEE 2015 34th Chinese Control Conference (CCC). Hangzhou: IEEE, 2015: 4472-4479.

[18] CRISCI S, PORTA F, RUGGIERO V, et al. Hybrid limited memory gradient projection methods for box-constrained optimization problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2022, 84(1): 151-189.

(编辑:黄利华)